ESERCIZI ANALISI 1

04-04-2013

(1) Rappresentare l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$ e verificare che è un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ (riferirsi alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$).

(2) Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico S. Provare che l'insieme $E^0 = \{x \in E : x \text{ è interno ad } E\}$ costituito dai punti interni ad E è un sottoinsieme aperto di S.

(3) Sia I un intervallo chiuso e limitato, in $C^0(I)$ si consideri la funzione:

$$d(f,g) = \int |f(t) - g(t)| dt,$$

verificare che $d(f,g)$ è una metrica in $C^0(I)$.

(4) Lo spazio metrico dell'esercizio precedente non è completo. Per verificarlo si studi la successione:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 - 1/n \\ nt - n + 1 & \text{se } 1 - 1/n \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \\ -nt + 2n + 1 & \text{se } 2 \leq t \leq 2 + 1/n \\ 0 & \text{se } 2 + 1/n \leq t \leq 3. \end{cases}$$

(5) Verificare che $\mathbb{R}^2$ con la metrica:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 = x_2 \end{cases}$$

è uno spazio metrico. Rappresentare qualche intorno $B_{(x,y)}(r)$ per questa metrica.

(6) Dimostrare che se E ed F sono due insiemi con E chiuso e F compatto allora $E \cap F$ è compatto.

(7) Siano $E_1, \ldots, E_n$ sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico S, dimostrare che $E = \cap_{i=1}^n E_i$ e $F = \cup_{i=1}^n E_i$ sono compatti.

(8) Dedurre la disuguaglianza di Minkowski dalla disuguaglianza di Hölder.
Disuguaglianza di Hölder. Siano $p > 0$ e $q > 0$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora per ogni insieme I risulta:

$$\int_I |f(x)||g(x)| dx \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Disuguaglianza di Minkowski. Sia $p \geq 1$, allora

$$\left(\int_I |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(9) Sia $f : S \to S'$ un'applicazione continua dello spazio metrico S nello spazio metrico S'. Supponiamo che S sia compatto e f sia iniettiva. Provare che l'applicazione $f^{-1} : f(S) \to S$ è continua.

(10) Sia E_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ una famiglia qualsiasi di insiemi connessi di uno spazio metrico connesso S. Provare che $E = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$ è connesso se vale una delle condizioni seguenti:
 i esiste $x_0 \in S$ tale che $x_0 \in E_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$;
 ii esiste $\bar{\alpha}$ tale che $E_{\bar{\alpha}} \cap E_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$.
Si mostri con un esempio che tali condizioni sono sufficienti, ma non necessarie.

(11) Quali dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{C}$ sono aperti o chiusi? a) $\{z : 0 < |z| < 1\}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\{z : z^n = 1 \text{ per qualche } n\}$, d) $\{z \in \mathbb{R}, 0 \leq z < 1\}$, e) $\{z \in \mathbb{R}, 0 < z < 1\}$, f) $\{z \in \mathbb{R}, 0 \leq z \leq 1\}$

(12) Mostrare esplicitamente che ogni disco aperto di uno spazio metrico è aperto, e ogni disco chiuso è chiuso.

(13) Mostrare che la chiusura di un sottinsieme limitato di uno spazio metrico è limitato e la chiusura di uno totalmente limitato è totalmente limitato.

(14) Sia (X,d) uno spazio metrico, e introdurre in $X \times X$ la funzione $d'((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$. Mostrare che d' è una metrica e che la funzione distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è continua.