ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 13 APRILE 2012
CANALE A-DI

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

(1): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{n+1}{n^3+n+3}\right)$;

(2): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^5}{3^n}$;

(3): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

(4): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}\right)$;

(5): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3)-n^{3/5}}{n^{1/4}\log(n^n+n!)}$;

(6): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)\left(n\tan\frac{1}{n}-1\right)$.

Esercizio 2. Mostrare, usando il criterio di condensazione di Cauchy, che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

è convergente se $\alpha>1, \beta\in\mathbb{R}$ e se $\alpha=1, \beta>1$ mentre è divergente negli altri casi.

Esercizio 3. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+\log n}{n^\alpha \log(n+1)}}$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Stabilire per quali numeri complessi z convergono le serie:

(1): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

(2): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(1): $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(3+(\log x)^2)}\,dx$;

(2): $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2-2x}\,dx.$

Esercizio 6. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$

(1): la funzione $\dfrac{\log(1+|x|)}{|x|^\alpha}$ è integrabile sull'intervallo $(-\infty, 0)$;

(2): la funzione $\dfrac{1-e^{-x}}{x^\alpha |x-1|^{4\alpha}}$ è integrabile sull'intervallo $(0, +\infty)\setminus\{1\}$.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy

E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`