ESERCIZI ANALISI 1

11-04-2013

Alcuni degli argomenti trattati in questo foglio sono rilevanti, abbiamo quindi preparato una lista più ricca del solito. Gli esercizi dovrebbero essere svolti con tranquillità, può non essere sufficiente una settimana. Alcuni sono standard, altri teorici, altri difficili. Non sono quindi intesi tutti come preparazione per un esonero standard, o come parte irrinunciabile di un programma d'esame, in questo senso provate a cimentarvi. In ogni caso siete benvenuti a venire a parlarne. Parte degli esercizi ha origine dal libro di Rudin.

Continuità e uniforme continuità

(1) Dimostrare che una funzione $f : X \to Y$ tra spazi metrici è continua se e solo se $f^{-1}(F)$ è chiuso per ogni $F \subseteq Y$ chiuso. Dedurre una dimostrazione alternativa del teorema: Se $f : X \to Y$ è continua e biunivoca con X compatto allora f^{-1} è continua.

(2) Siano f, g due funzioni continue tra spazi metrici $X \to Y$ tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in E$, dove $E \subset X$ è un sottoinsieme denso. Mostrare che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$.

(3) Mostrare che la funzione $f(x) = \sin x$ è uniformemente continua in $I = \mathbb{R}$.

(4) Mostrare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua in $I = (0, +\infty)$, ma è uniformemente continua in $I = (a, +\infty)$, con $a > 0$.

(5) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi metrici con rispettive distanze d, d'. Per ogni $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ sia

$$E(x_0, \varepsilon) = \{\delta > 0 : d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \ \forall x \in B(x_0, \delta)\}.$$

- Mostrare che $E(x_0, \varepsilon)$ è un intervallo di $\mathbb{R}^+$ con estremo inferiore 0.
- Mostrare che se $E(x_0, \varepsilon)$ è superiormente limitato allora l'estremo superiore di $E(x_0, \varepsilon)$ è ancora in $E(x_0, \varepsilon)$, quindi $E(x_0, \varepsilon)$ ha massimo.
- Sia $\delta(x_0, \varepsilon) := \sup E(x_0, \varepsilon)$. Mostrare che $\delta(x_0, \varepsilon) = +\infty$ per ogni $\varepsilon > 0$ se e solo se f è costante.
- Mostrare che f è uniformemente continua se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\inf\{\delta(x_0, \varepsilon) : x_0 \in X\} > 0.$$

Il precedente esercizio è utile a chiarire la definizione di uniforme continuità. Potrebbe inizialmente dare l' impressione di calcolabilità, ma nella pratica il suo uso è piuttosto limitato, provate a fare i calcoli indicati nell'ultima parte su esempi semplici! Piuttosto, nella pratica si procede con criteri generali, alcuni visti a lezione, altri proposti tra gli esercizi, che garantiscono l'uniforme continuità di classi di funzioni.

(6) Mostrare che $f : X \to Y$ è uniformemente continua se e solo se

$$\lim_{\mathrm{diam}(E)\to 0} \mathrm{diam} f(E) = 0,$$

dove questa relazione è così interpretata: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni sottinsieme $E \subseteq X$ con $\mathrm{diam}(E) < \delta$, si ha $\mathrm{diam} f(E) < \varepsilon$

(7) Esistono funzioni a valori reali illimitate uniformemente continue?

(8) Esiste una funzione uniformemente continue a valori reali illimitata con dominio un sottoinsieme a chiusura compatta di uno spazio metrico? Fornire una spiegazione.

(9) Mostrare che ogni funzione definita su un intervallo reale a valori reali con derivata limitata è Lipschitziana, e che ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua. Mostrare con un esempio che la classe intermedia è propriamente contenuta in quella più grande.

(10) Dimostrare che somme, combinazioni lineari e composizioni di funzioni reali a valori reali uniformemente continue sono ancora uniformemente continue. Mostrare con un esempio che questa proprietà non vale per i prodotti puntuali di funzioni. Mostrare tuttavia che il prodotto puntuale di funzioni *limitate* e uniformemente continue è ancora uniformemente continuo.

(11) Siano f, g funzioni uniformemente continue definite su due sottoinsiemi A, B di uno spazio metrico X, rispettivamente, a valori in uno spazio metrico completo Y. Per il teorema sulla estendibilità, a meno di passare alle estensioni di f e g sulle chiusure, sappiamo che possiamo sempre assumere A, B chiusi (d'accordo?). Assumiamo che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A \cap B$. Dimostrare che la funzione h definita su $A \cup B$ in modo tale che $h\restriction_A = f$, $h\restriction_B = g$ è uniformemente continua.

(12) Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua che ammetta limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ finiti è uniformemente continua. Si può estendere questa conclusione ad ogni funzione continua e limitata? Anticipare i due esercizi seguenti può essere utile a chiarire la questione.

(13) Una funzione ovunque definita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica* se esiste $T > 0$ tale che $f(x) = f(x+T)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Mostrare che ogni funzione continua e periodica è uniformemente continua.

(14) Abbiamo visto in classe che la funzione $x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$ non è uniformemente continua. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Mostrare con esempi che $f(x^2)$ può non essere uniformemente continua, anche se f lo è.

(15) Sia E un sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrico (X, d). Per ogni $x \in X$, sia $d(x, E)$ la *distanza di x da E* definita

$$d(x, E) := \inf\{d(x, y), y \in E\}.$$

Mostrare che:

• $d(x, E) = 0$ se e solo se $x \in \overline{E}$,
• la funzione $x \in X \to d(x, E) \in [0, +\infty)$ è Lipschitziana.

Connessione:

(16) Dimostrare che un sottinsieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se è connesso per archi, ovvero: per ogni $x, y \in E$ con $x < y$ si ha $[x, y] \subseteq E$.

(17) Dimostrare che ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli.

Punti di discontinuità:

(18) Sia f una funzione reale a valori reali definita su un intervallo I e $x_0 \in I$ un punto di discontinuità per f. Ricordiamo che x_0 si dice di *prima specie* se esistono finiti $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Altrimenti x_0 è detto di *seconda specie.* Nel caso in cui questi limiti siano uguali, la discontinuità si dice *eliminabile.*

Sia $E \subset [0, 1]$ un sottoinsieme finito arbitrario. Costruire e visualizzare una funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ discontinua esattamente sui punti di E, con discontinuità di prima specie.

(19) Mostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che vale 1 sui razionali e 0 sugli irrazionali è discontinua in ogni punto con discontinuità di seconda specie.

(20) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che vale x in ogni punto x razionale e 0 sugli irrazionali. Mostrare che f è continua in 0 e ha discontinuità di seconda specie in tutti gli altri punti.

(21) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia $[x]$ la *parte intera* di x: il più grande intero $\leq x$. Sia inoltre $(x) := x - [x]$ la *parte frazionaria* di x. Visualizzare il grafico delle funzioni $[x]$ e (x), determinare i punti di discontinuità e classificarli.

(22) (*Impegnativo, ma ne vale la pena, è illuminante sulla nozione di continuità*) Considerare la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque definita:

• $f(0) = 1$,
• se $x = \frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$, p e q primi tra loro, allora $f(x) = \frac{1}{q}$,
• se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ allora $f(x) = 0$.

Provare che f è continua su tutti gli irrazionali e ha discontinuità di prima specie sui razionali.

I seguenti esercizi (23)–(26) sono impegnativi, ma vorrei incoraggiarvi a meditarci su, perché sono utili per il futuro. Inoltre forniscono un quadro piuttosto chiaro sulla struttura delle funzioni reali e monotone. Si parte dalla notevole proprietà delle funzioni monotone definite su intervalli vista in classe, che dice che esse devono necessariamente avere una quantità più che numerabile di punti di continuità, come conseguenza della continuità e non numerabilità di $\mathbb{R}$. Infatti, poiché, ogni punto di discontinuità è di prima specie, ne segue che l'insieme di tali punti è al più numerabile (dove entra la continuità dei reali?). Però i punti di continuità non formano in generale insiemi continui (intervalli), come si potrebbe a priori essere indotti a pensare.

(23) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona con dominio un intervallo chiuso e limitato. Sia $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ una numerazione dell'insieme dei suoi punti di discontinuità. Dimostrare che

$$\sum_n s_n < \infty$$

dove

$$s_n := \lim_{x\to x_n^+} f(x) - \lim_{x\to x_n^-} f(x)$$

è il *salto* di f in x_n.

(24) Sia x_n una successione arbitraria di punti distinti di un dato intervallo I e sia s_n una successione a termini positivi in $\mathbb{R}$ tale che $\sum_n s_n < +\infty$. Poniamo, per ogni $x \in I$,

$$f(x) := \sum_{n: x_n < x} s_n,$$

dove, per ogni fissato x, la serie si riferisce alla scelta di un ordinamento dell'insieme $\{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$. Se non ci sono x_n a sinistra di x, poniamo $f(x) = 0$.

• Osservare che per ogni x, $f(x)$ non dipende dalla scelta dell'ordinamento nella serie, ma solo da x, e quindi $f : I \to \mathbb{R}$ è ben definita.

• Visualizzare il grafico di $f(x)$ quando l'insieme $\{x_n\}$ è finito, oppure quando x_n è una successione monotona crescente e limitata.
• Mostrare che f ha discontinuità esattamente in ciascun x_n con salto s_n, ed è continua da sinistra: Più precisamente:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in I,$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0), \quad \text{se } x_0 \notin \{x_n\},$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) + s_{n_0}, \quad \text{se } x_0 = x_{n_0}.$$

Una funzione della forma descritta nell'esercizio precedente, si chiama funzione di salto. Attenzione, il seguente esercizio vi mostra che i punti $\{x_n\}$ di salto possono costituire un insieme dalla forma piuttosto indomabile.

(25) Utilizzare la costruzione precedente per costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona, continua sugli irrazionali e discontinua sui razionali.
(26) Mostrare che:
• Ogni funzione monotona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con dominio un intervallo chiuso e limitato che sia continua da sinistra in ogni punto si decompone in modo naturale in $[a, b]$ nella somma di una funzione continua e monotona f^c e di una funzione di salto f^s continua a sinistra,

$$f = f^c + f^s.$$

• Una decomposizione con queste proprietà è unica.
• Più in generale, mostrare che una funzione monotona è la somma

$$f = f^e + f^s$$

con f^e che ha solo discontinuità eliminabili, e f^s di salto continua a sinistra, e dedurre che

$$f = f^n + f^c + f^s$$

con f^n nulla in $[a, b]$ tranne che in un insieme numerabile di punti; f^c continua e f^s di salto continua a sinistra.

Limiti in due variabili

Segue ora un gruppo di esercizi sui limiti e continuità in due variabili. Questo argomento sarà trattato approfonditamente il prossimo anno. Non è quindi necessario (ma neanche vietato) saper svolgere tutti gli esercizi che seguono ai fini di questo corso. È sufficiente consolidare la nozione di limite in uno spazio metrico, svolgeno due o tre degli esercizi seguenti.

(27) Mostrare che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

(28) Studiare la continuità in $(0, 0)$ della funzione osservando la restrizione della funzione sulle rette che passano per $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(29) Studiare il limite in $(0, 0)$ della funzione:

$$f(x, y) = \frac{8xy^2}{x^2 + y^4}.$$

(30) Sia

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^6}.$$

Mostrare che f è continua in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, che la restrizione di f ad ogni retta passante per $(0, 0)$ è continua, con limite in $(0, 0)$ indipendente dalla retta, ma $f(x, y)$ è illimitata quindi non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.
(31) Studiare la continuità in $(0, 0)$ della funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(32) Si calcoli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin (x^4 + y^4)}{x^3 + xy^2}.$$

(33) Si calcoli:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \ln x}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

(34) Studiare la continuità in $(0,0)$ della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$