Tutoraggio di Analisi Matematica I

canale Pb-Z

Scheda 6 di esercizi, 17 aprile 2012

1) E' data la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Verificare che essa converge e dire quanti suoi termini si devono sommare in modo che la loro somma differisca di $\frac{1}{10}$ dalla somma della serie.

2) Utilizzando la definizione di integrale improprio, determinare quali dei seguenti integrali impropri convergono:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx\,,\ \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx\,,\ \int_0^{\infty}\sin(e^x)dx\,.$$

3) Stabilire se convergono gli integrali impropri:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-x}}dx\,,\ \int_0^1 \frac{e^x-1-x}{\log^3(1+x)}dx\,.$$

4) Stabilire se convergono gli integrali impropri:

$$\int_1^{\infty}\frac{1+\cos^3 x}{x}\,,\ \int_2^{\infty}\frac{x^5+2}{e^{\sqrt{x}}}dx\,.$$

5) Determinare per quali $\alpha \geq 0$ converge ciascuno degli integrali impropri:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin^{\alpha}(x^3)}{(e^x-1)^4}dx\,,\ \int_1^{\infty}\frac{\log(x^2)}{(\sqrt{x}+2)^{\alpha}}\,dx\,.$$

6) Determinare per quali $\alpha \geq 0$ converge ciascuno degli integrali impropri:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}\,,\ \int_0^{\infty}\frac{\arctan^{\alpha}(x^3)}{x^2(2-\sin x)}dx\,.$$

7) Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:
(*i*) Sia $f:[a,b]\to I\!R$ una funzione integrabile in senso improprio su $[a,b]$ e continua in (a,b). Allora esiste $\xi\in(a,b)$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)\,.$$

(*ii*) Se converge l'integrale improprio $\int_0^{\infty}f(x)dx$ e $f\geq 0$ e continua in $[0,\infty)$, allora f è superiormente limitata in $(0,\infty)$.