

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 4 MAGGIO 2012
CANALE A-DI**

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Sia X uno spazio normato. Verificare che la funzione

$$x \in X \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$$

è continua su X .

Esercizio 2. Verificare che le seguenti funzioni $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sono continue su tutto \mathbb{C} :

(i): $z \rightarrow \bar{z}$;

(ii): $z \rightarrow |z|$;

(iii): $z \rightarrow z^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iv): $z \rightarrow e^z$.

Esercizio 3. Se X è uno spazio normato, una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ verificante le proprietà

(i): $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in X$

(ii): $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

prende il nome di *funzionale lineare* su X . Dimostrare che f è continuo se e solo se esiste una costante $k \geq 0$ tale che

$$|f(x)| \leq k\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Esercizio 4. Estendere con continuità a tutto \mathbb{R}^2 , se possibile, le seguenti funzioni di due variabili reali.

(i): $f(x, y) = \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 y^2}$;

(ii): $f(x, y) = xy \log |xy|$;

(iii): $f(x, y) = \frac{\sin(x - 2y)}{x - y}$.

Esercizio 5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Fissato $x_0 \in X$, verificare che la funzione

$$x \in X \rightarrow d(x, x_0)$$

è uniformemente continua su X .

Esercizio 6. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue nei domini indicati.

(i): x^3 in $[0, +\infty)$;

(ii): $\sqrt[3]{x}$ in $[0, +\infty)$.

Esercizio 7. Dimostrare, come conseguenza del Teorema di Weierstrass, che tutte le norme sono equivalenti su \mathbb{R}^n .

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY
E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`