

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 18 APRILE 2012  
CANALE DL-PA**

GIOVANNI SCILLA

**Esercizio 1.** Stabilire se i seguenti integrali impropri convergono:

(1):  $\int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + \sin x)}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}} dx;$

(2):  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\log(1 + x^{3/4})(x^3 + 1)} dx.$

**Esercizio 2.** Studiare l'integrabilità delle seguenti funzioni al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

(1):  $\frac{(1 - \cos x)^\alpha}{\tan x - x}$  in  $[0, 1)$ ;

(2):  $\frac{(\sin x)^\alpha}{x^3(x + 5)^4}$  in  $(0, 2)$ .

**Esercizio 3.** Sia assegnata la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\cos t - 2}{t^3 + 2} dt$$

in  $[0, +\infty)$ .

- La funzione  $F$  è derivabile in  $[0, +\infty)$ ? Se sì, calcolarne la derivata.
- Calcolare, se esiste, il massimo di  $F$  in  $[0, +\infty)$ .
- Esiste finito il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ?

**Esercizio 4.** Determinare insieme di definizione, asintoti orizzontali e verticali e intervalli di monotonia della funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t} e^{-t} dt.$$

**Esercizio 5.** Siano assegnati gli insiemi

$$E_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq \frac{1}{n} \right\}, n \in \mathbb{N}.$$

- Gli  $E_n$  sono compatti?
- Gli  $E_n$  sono aperti?
- Determinare  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  e stabilire se è chiuso.

**Esercizio 6.** Stabilire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 2}{2^n}$$

converge e, se sì, calcolarne la somma.

**Esercizio 7.** Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\left( \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{\log n} \right) \sqrt{n}}{(\sqrt{n^2 + 2n - n})n^4}, \frac{1}{n^2} \int_1^n t \arctan t \sin \left( \frac{1}{t^2} \right) dt \right).$$

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY  
*E-mail address:* `scilla@mat.uniroma1.it`