Tutoraggio di Analisi Matematica I

canale Pb-Z

Scheda 7 di esercizi, 8 maggio 2012

1) Utilizzando la definizione di uniforme continuità, verificare che $f(x) = e^x$ è uniformemente continua in $(-\infty, 1]$.

2) Dimostrare che una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua in I se e solo se per ogni coppia di successioni $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I$ tali che $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, si ha $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

3) Utilizzando l'Esercizio precedente, verificare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua in $(0, 2]$.

4) Dire se sono uniformemente continue le seguenti funzioni negli insiemi indicati:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \in (-1, 0)\,;$$

$$g(x) = x \log x\,, \quad x \in (0, 3]\,;$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 9}\,, \quad x \in (-1, 3)\,.$$

5) Dire se sono uniformemente continue in $[1, \infty)$ le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3}\,, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 3}{x + 1}}\,,$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad w(x) = x^3\,.$$

6) Dire se sono uniformemente continue in $[1, \infty)$ le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin^2 x\,, \quad g(x) = \sin(x^2)\,.$$

7) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

negli intervalli $I = (1, \infty)$ e $J = (2, \infty)$.