ESERCIZI ANALISI 1

2-05-2013

(1) Mostrare che limite uniforme di una successione di funzioni uniformemente contunue è uniformemente continuo.
(2) Costruire una successione di funzioni su uno spazio metrico puntualmente limitata ma non uniformemente limitata.

Dai libri di Cecconi-Stampacchia e Rudin:

(3) Sia f_n una successione di funzioni limitate a valori complessi uniformemente convergente in uno spazio metrico. Mostrare che f_n è uniformemente limitata, ovvero esiste $M > 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x, n$.
(4) Siano f_n e g_n due successioni di funzioni complesse che convergono uniformemente su uno spazio metrico e siano $a, b \in \mathbb{C}$. Mostrare che la successione $af_n + bg_n$ converge uniformemente. Mostrare con un esempio che $f_n g_n$ non converge uniformemente in generale. Se in aggiunta f_n e g_n sono uniformemente limitate, mostrare che $f_n g_n$ converge uniformemente.
(5) Sia f_n una successione di funzioni uniformemente convergente. Provare o esibire un controesempio sulla veridicita' della affermazione che una composizione $g(f_n(x))$ converge uniformemente. Eventualmente formulare una condizione sufficiente su f_n.
(6) Sia
$$f_n(x) = \frac{x}{nx+1}, \quad x \in [0,1].$$
Calcolare il limite puntuale e stabilire se f_n converge uniformemente. Stesso esercizio per la successione $f'_n(x)$. Verificare se valgono le conclusioni del teorema di scambio della derivata con il limite.
(7) Come l'esercizio precedente per la successione
$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \quad x \in (0,1).$$
(8) Sia
$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \quad x \in [0,1].$$
Mostrare che f_n converge puntualmente ma non uniformemente. Mostrare che, nonostante ciò, il limite è continuo e si può scambiare l'ordine tra integrazione e limite su n.
(9) Determinare, per ciascuna delle seguenti serie di funzioni, un intervallo chiuso e limitato in modo che la convergenza sia uniforme:

a.
$$\sum_1^\infty \frac{(9x)^n}{n!}$$
b.
$$\sum_1^\infty \frac{n!(x-4)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}$$
c.
$$\sum_1^\infty \frac{(n!)^2(x+1)^n}{(2n)!}$$
d.
$$\sum_1^\infty \frac{x^n}{(n+1)\log(n+1)}$$
e.
$$\sum_1^\infty x(1-x)^n$$
f.
$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^x}$$
g.
$$\sum_1^\infty \frac{(1-x^{2n})^{1/2}}{3^n}$$
h.
$$\sum_1^\infty (x \log x)^n$$

i.
$$\sum_1^\infty (1+x)x^n$$

(10) Considerare la serie di funzioni
$$\sum_1^\infty \frac{1}{1+n^2x}.$$
Per quali x la serie converge assolutamente? Su quali intervalli converge uniformemente? Su quali non converge uniformemente? La somma della serie è una funzione continua in ogni punto di convergenza puntuale? La somma è limitata?

(11) Mostrare che la serie di funzioni
$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$
converge uniformemente in ogni intervallo limitato, ma non converge assolutamente per alcun valore di x.

(12) Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f_n(x) = \sin^2 \frac{\pi}{x} \quad x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$$
e $f_n(x) = 0$ altrimenti. Fare un disegno di alcuni termini della successione. Mostrare che f_n converge puntualmente ad una funzione continua (quale?) ma non uniformemente. Mostrare che la serie $\sum_n f_n(x)$ converge assolutamente per ogni x, ma non uniformemente.

(13) Sia
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$
Mostrare che f_n converge puntualmente, calcolare il limite $f(x)$ e mostrare che f_n converge anche uniformemente. Mostrare che l'equazione $f'(x) = \lim_n f_n'(x)$ vale se e solo se $x \neq 0$. Fornire una spiegazione.

(14) Sia $I(x)$ la funzione che vale 0 per $x \leq 0$ e che vale 1 per $x > 0$. Sia x_n una successione di punti distinti di (a, b) e sia c_n una successione tale che $\sum_n |c_n| < +\infty$. Mostrare che la serie
$$\sum_1^\infty c_n I(x - x_n)$$
converge uniformemente in $[a, b]$ e che f è continua per ogni $x \neq x_n$. Confrontare con l'esercizio 24 del 15 aprile, e osservare i vantaggi di avere ora una teoria a disposizione per ottenere i punti di continuità.

(15) Sia f_n una successione di funzioni continue che converge uniformemente ad una funzione f, e sia x_n una successione di punti convergente ad un certo x. Mostrare che
$$\lim_n f_n(x_n) = f(x).$$