ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DELL' 11 MAGGIO 2012 CANALE A-DI

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Dimostrare che se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ sono uniformemente continue, allora anche la funzione $f + g$ è uniformemente continua.

Esercizio 2. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue in $(0, 3], [3, +\infty), (0, +\infty)$.

(i): $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$;

(ii): $f(x) = \cos^2 x$;

(iii): $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$;

(iv): $f(x) = \sqrt{x} \log x + 2x$;

(v): $f(x) = x^2 \left(\cos \dfrac{1}{x} - 1 \right) + \sqrt{x} - 2$.

Esercizio 3. Sia (f_n) una successione di funzioni continue nell'intervallo I di $\mathbb{R}$, convergente uniformemente in I verso f. Verificare che, se $x_n, x \in I$ e $x_n \to x$, allora si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza delle seguenti successioni di funzioni nei domini indicati, determinandone il limite puntuale, stabilendo se esso è uniforme ed, eventualmente, individuando i sottodomini in cui la convergenza è uniforme.

(i): $a_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}, \quad x > 0$;

(ii): $b_n(x) = \dfrac{n^2}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$;

(iii): $c_n(x) = \dfrac{nx^3 + (n+1)^2 \sin x}{n^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$;

(iv): $d_n(x) = x^n \ln(x^n), \quad x \in (0, 1]$;

(v): $f_n(x) = (x^2 - x^4)^n, \quad x \in [0,1];$

(vi): $g_n(x) = e^{-1/(x^2+n)}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy
E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`