ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 7 MAGGIO 2012
CANALE DL-PA

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Sia X uno spazio normato. Verificare che la funzione

$$x \in X \to ||x|| \in \mathbb{R}$$

è continua su X.

Esercizio 2. Sia X uno spazio normato e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che la funzione $h : X \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = g(||x||), \quad \forall x \in X$$

è continua su X.

Esercizio 3. Verificare che le seguenti funzioni $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono continue su tutto $\mathbb{C}$:

(i): $z \to \bar{z}$;

(ii): $z \to |z|$;

(iii): $z \to z^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iv): $z \to e^z$.

Esercizio 4. Se X è uno spazio normato, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ verificante le proprietà

(i): $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in X$

(ii): $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

prende il nome di *funzione lineare* su X. Dimostrare che f è continuo se e solo se esiste una costante $k \geq 0$ tale che

$$|f(x)| \leq k||x||, \quad \forall x \in X.$$

Esercizio 5. Estendere con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$, se possibile, le seguenti funzioni di due variabili reali.

(i): $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$;

(ii): $f(x,y) = \dfrac{\sin(x-2y)}{x-y}$.

Esercizio 6. Sia (X,d) uno spazio metrico. Fissato $x_0 \in X$, verificare che la funzione

$$x \in X \to d(x, x_0)$$

è uniformemente continua su X.

Esercizio 7. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue nei domini indicati.

(i): $f(x) = \sqrt{x}\log x + 2x$ in $(0,1], [1,+\infty), (0,+\infty)$;

(ii): $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $[0,+\infty)$;

(iii): $f(x) = x\log x + 3x^2$ in $(0,1], [1,+\infty), (0,+\infty)$.

Esercizio 8. Dimostrare, come conseguenza del Teorema di Weierstrass, che tutte le norme sono equivalenti su $\mathbb{R}^n$.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy
E-mail address: scilla@mat.uniroma1.it