

Tutoraggio di Analisi Matematica I

canale Pb-Z

Scheda 8 di esercizi, 15 maggio 2012

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $[0, 1]$ delle successioni di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + x \log n}, \quad g_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x}.$$

2) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme, sia in tutto \mathbb{R} che in ogni intervallo limitato, della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } e^n \leq x < e^{n+1} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $[0, 1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{n+2} & \text{se } \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx, \quad \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx.$$

4) Studiare convergenza puntuale ed uniforme in $[0, 1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

La convergenza è uniforme in $[\alpha, 1]$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$?

5) Trovare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni, e verificare che la convergenza non è uniforme in $[0, \pi]$:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}, \quad g_n(x) = \sin^n(x).$$

6) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in $[a, b]$, convergente uniformemente a f in $[a, b]$. Verificare che per ogni $p \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

7) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2x}{n!x^2 + n^{-n}},$$

e trovare i sottoinsiemi di E in cui la convergenza è uniforme.