ESERCIZI ANALISI 1

09-05-2013

(1) Studiare la convergenza puntuale e uniforma su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni:

$$f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$$

(2) Data la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ (nx-1)^2, & 0 < x < \frac{2}{n} \\ 1, & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

studiare la convergenza puntuale di $f_n(x)$ su $\mathbb{R}$ e la convergenza uniforma sugli insiemi: $\mathbb{R}$, $[0, +\infty)$, $(0, +\infty)$, $[\frac{1}{100}, +\infty)$.

(3) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \arctan nx, & x < 0 \\ xe^{-n^2x^2}, & 0 \leq< x \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \\ \sqrt{2}ne^{-2}, & x > \sqrt{2}n \end{cases}$$

studiare la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$, $(-\infty, 0)$ e $[0, +\infty)$.

(4) Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ per ogni $n \geq 1$.

a. Determinare l'insieme di convergenza puntuale Λ e la funzione limite della successione f_n.

b. Stabile se f_n converge uniformemente su Λ e sugli intervalli del tipo $[0, b]$ con $0 < b < 1$.

c. Verificare che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

(5) Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n + x^2}.$$

a. Determinare l'insieme di convergenza puntuale.

b. Mostrare che la serie converge uniformemente su ogni intervallo $[0, b]$ con $0 < b < \frac{1}{2}$.

c. Mostrare che la somma della serie è una funzione continua su $[0, \frac{1}{2})$.

(6) Considerare la serie di Taylor della funzione $f(x)$ dell'esercizio (10) del foglio di esercizi del 21 marzo. Mostrare che essa converge totalmente in $[-1, 1]$ alla funzione $f(x)$.

(7) Mostrare che una successione di funzioni f_n a valori complessi con dominio uno spazio metrico compatto, converge uniformemente se e solo se converge puntualmente ed è equicontinua.

(8) Sia E un sottinsieme dello spazio metrico delle funzioni $C_B(X)$, ovvero l'insieme delle funzioni continue a valori complessi e limitate definite su uno spazio metrico X. Munire $C_B(X)$ della metrica uniforme. Mostrare che se E è limitato allora $\overline{E}$ è limitato, e che se E è equicontinuo allora $\overline{E}$ è equicontinuo.

(9) Sia f_n una successione di funzioni a valori complessi uniformemente continue con dominio un sottinsieme denso E di uno spazio metrico X. Supponiamo che f_n converga uniformemente ad una funzione f su E. Mostrare che la successione delle estensioni continue $\overline{f_n} : X \to \mathbb{C}$ converge uniformemente all'estensione continua $\overline{f}$ di f.

(10) Sia $\sum_0^\infty c_n(x-a)^n$ una serie di potenze reale con raggio di convergenza $R > 0$ e finito. 1) Supponiamo che la serie converga totalmente in $(a-R, a+R)$. Mostrare che allora essa converge totalmente anche in $[a-R, a+R]$. 2) Supponiamo ora invece che la serie converga in un estremo, diciamo $a+R$, e che i coefficienti c_n abbiano segno definitivamente costante. Mostrare che la serie converge totalmente in $[a-R, a+R]$. Dedurre una dimostrazione semplice del teorema di Abel in questo caso particolare, ovvero la somma risulta continua in $[a-R, a+R]$. Osservare, attraverso gli esempi discussi fin qui, che la somma può non essere derivabile fin sulla chiusura $[a-R, a+R]$ (mentre lo è sempre all'interno).