ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 18 MAGGIO 2012
CANALE A-DI

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Determinare l'insieme di convergenza puntuale E delle seguenti successioni di funzioni e individuare i sottoinsiemi di E nei quali la convergenza è uniforme.

(i): $f_n(x) = x^{-n} \log(nx)$;

(ii): $f_n(x) = \dfrac{2x}{nx^2 + 2^{-\sqrt{n}}}$;

(iii): $f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{n^2}}$;

(iv):

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ \\ 1 - x & \text{se } \dfrac{1}{n} < x \le 1; \end{cases}$$

(v): $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \log(1 + e^{nx})$.

Esercizio 2. Come applicazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, dimostrare che, se (g_n) è una successione di funzioni continue ed equilimitate in $[a, b]$, allora la successione (f_n) definita da

$$f_n(x) = \int_a^x g_n(t)\, dt$$

ha un'estratta convergente uniformemente.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti.

(i): $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 x^2 e^{-nx^2}\, dx$;

(ii): $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 e^{-1/(x^2+n)}\, dx$.

Esercizio 4. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, totale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni.

- **(i):** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 x^n}$;
- **(ii):** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}, \quad p > 0$;
- **(iii):** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3 x + n^2}$;
- **(iv):** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n(n+1)}$;
- **(v):** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \arcsin \frac{(x+1)^2}{n}$.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy

E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`