ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 9 MAGGIO 2012
CANALE DL-PA

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Estendere con continuità a tutto $\mathbb{R}^2$, se possibile, le seguenti funzioni di due variabili reali.

(i): $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$;

(ii): $f(x,y) = \dfrac{xy}{|xy|}$.

Esercizio 2. Sia $X \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *hölderiana* di ordine α, $0 < \alpha \leq 1$, in $A \subset X$ se esiste una costante positiva M tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in A.$$

Dimostrare che ogni funzione hölderiana in A è uniformemente continua in A.

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue in $(0,3], [3,+\infty), (0,+\infty)$.

(i): $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$;

(ii): $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$;

(iii): $f(x) = x^2\left(\cos\dfrac{1}{x} - 1\right) + \sqrt{x} - 2$.

Esercizio 4. Assegnata la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x,y) = (x+y, x-y),$$

dimostrare che è continua in $\mathbb{R}^2$. È uniformemente continua?

Esercizio 5. Assegnata la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \max\{x,y\},$$

dimostrare che è continua. È uniformemente continua?

Esercizio 6. Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue.

(i): $f(x) = \cos^2 x$;

(ii): $f(x) = \log x$.

Esercizio 7. Studiare la convergenza in $I = [0, 1]$ delle successioni di funzioni

(i): $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$;

(ii): $g_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy
E-mail address: scilla@mat.uniroma1.it