ESERCIZI ANALISI 1

09-05-2013

(1) Si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2}.$$

a. Determinare l''insieme di convergenza puntuale.
b. Calcolarne la somma.
c. Determinare almeno un intervallo su cui la serie converge uniformemente.

(2) Studiare la convergenza totale, uniforme, assoluta e puntuale delle seguenti serie di funzioni:

a.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2} \qquad x \in [-1,1]$$

b.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

c.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \qquad |x| \geq a > 0$$

d.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} \qquad x \geq 0$$

e.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si osservi che in questo caso (cosa non vera in generale!!!) la serie converge assolutamente a $|f(x)|$, dove $f(x)$ è la somma della serie di partenza.

f.
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad x \in [-1,1]$$

Si osservi che in questo caso la serie converge ad una funzione $g(x) \neq |f(x)|$, dove $f(x)$ è la somma della serie di partenza.

g.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(nx) - \arctan[(n-1)x]) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si osservi che per quanto riguarda la convergenza assoluta questa serie si comporta come la serie dell'esercizio 2.d.

h.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n(\sin(x))^{2n}}{n+1} \qquad x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$$

i.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(3) Calcolare il raggio e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

a.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 n^n$$

b.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

c.
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^{n+1}}$$
d.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$
e.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3n-1}\frac{x^{2n}}{4^n}$$
f.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^3}(x-1)^n$$
g.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}x^{2n}$$
h.
$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n!}$$

(4) Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = \sin^2 x$.

(5) Data la funzione $g(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi]$
a. Disegnare il prolungamento periodico f della funzione g.
b. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier per f e calcolarla per $x = 0$.
c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

(6) Data la funzione $g(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi]$
a. Disegnare il prolungamento periodico f della funzione g.
b. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier per f e calcolarla per $x = \pi$.
c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(7) Data la funzione $g(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$
a. Disegnare il prolungamento periodico f della funzione g.
b. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier per f e calcolarla per $x = \pi$.
c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(8) Data la funzione $g(x) = x^4$, $x \in (-\pi, \pi]$
a. Disegnare il prolungamento periodico f della funzione g.
b. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier per f e calcolarla per $x = \pi$.
c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

(9) Si trovi lo sviluppo di Fourier della funzione:
$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

(10) a. Disegnare il prolungamento periodico f della funzione ottenuta quale estensione pari in $[-\pi, \pi]$ della funzione $g(x)$ definita in $[0, \pi]$ da:
$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}.$$
b. Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f e calcolarla per $x = \frac{\pi}{2}$.
c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(11) Data la funzione
$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$
sia f il suo prolungamento periodico di periodo 2π. Disegnare f, scrivere la serie di Fourier ad essa associata e calcolarne la somma per $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(12) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione ottenuta quale estensione pari in $[\pi, \pi]$ della funzione $g(x)$ definita in $[0, \pi]$ da:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$
e scriverne la corrispondente seri di Fourier.

(13) a. Disegnare il prolungamento periodico f della funzione $g(x) = e^x$, per $x \in (-\pi, \pi]$.
b. Scrivere la serie di Fourier per f e calcolarla per $x = 0$ e $x = \pi$.
c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

(14) Disegnare l'estensione periodica f della funzione:

$$g(x) = 1 - |\sin x|, \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Specificare il periodo T della funzione f e calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier. Usare i risultati ottenuti per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$. Trovare un altro metodo per sommare la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

(15) a. Disegnare il prolungamento periodico f con periodo $T = 2$ della funzione $g(x) = 1 - x^2$, per $x \in (-1, 1]$.

b. Scrivere la serie di Fourier per f e calcolarla in $x = 0$.

c. Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.