TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
29 V 2013

(1) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \frac{2}{x}y = 2x + 1, \quad \text{per } x > 0.$$

Quindi:
(a) determinare l'unica soluzione che si mantiene limitata per $x \to 0^+$.
(b) determinare l'unica soluzione che soddisfa la condizione $y(1) = 0$.

(2) Sia S un sistema fisico che a una sollecitazione esterna (*ingresso*) $b(x)$ reagisce con una risposta (*uscita*) $y(x)$ legata a b dalla relazione:

$$y' + ay = b(x) \quad \text{con } a \text{ costante positiva.}$$

Posto $y(0) = y_0$, determinare l'uscita $y(x)$ del sistema nel caso in cui la sollecitazione esterna sia di tipo impulsivo, i.e. $b(x) = \delta(x - x_0)$.

$$\textit{Ricordiamo che } \delta(t) := \begin{cases} 1 & \textit{se } t = 0 \\ 0 & \textit{se } t \neq 0 \end{cases}$$

(3) Determinare l'integrale generale per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali

$$y' + xy - x = 0$$
$$y' + y\cot x - 2\cos x = 0$$
$$y' + y\sin x = \sin 2x.$$

(4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1+y)^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e specificare qual è il più ampio intervallo su cui la soluzione è definita.

(5) Fornire un'analisi qualitativa (senza fare conti) della soluzione della seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(6) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = |y| + x^2. \tag{*}$$

(i) Trovare la soluzione $y(x)$ di (*) tale che $y(a) = 0$ con a parametro reale.
(ii) Esistono altre soluzioni di (*) oltre a quelle trovate in (i)?

(7) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y - x^2} \\ y(0) = a \quad (a > 0) \end{cases}$$

(i) Provare che tale problema ammette un'unica soluzione $y_a(x)$ in un intorno di $x = 0$. Calcolare la derivata prima, seconda e terza di $y_a(x)$ in $x = 0$.

(ii)* Provare che la soluzione $y_a(x)$ è definita su tutta la semiretta $[0, +\infty[$ ed ha limite per $x \to +\infty$. Calcolare tale limite.

(8) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y - x| \\ y(0) = a \end{cases}$$

(i) Discutere al variare del parametro reale a, l'esistenza e l'unicità di soluzioni.

(ii) Determinare la soluzione del problema.

(iii) Dire per quali valori di a esistono soluzioni $y(x)$ del problema tali che

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1.$$

(9) Risolvere il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u' = v - u \\ v' = u - v. \end{cases}$$

con dati iniziali $u(0) = a$, $v(0) = b$.

(10) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipischitziana, crescente e tale che $f(0) = 0$. Sia $(u(x), v(x))$ la soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u' = f(v - u) \\ v' = f(u - v) \end{cases}$$

tale che $u(0) = 1$, $v(0) = 0$.

Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x)$.

(11) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia y_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x^2 + n} y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Provare che y_n converge uniformemente a $y \equiv 1$ per $n \to \infty$.

Più in generale dimostrare che se $\{a_n\}$ è una successione di funzioni continue convergente uniformemente ad una funzione a, con $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n| \leq M_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $\{y_n\}$ delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a_n(x) y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

convergono all'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x) y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(12) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia y_n la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \sqrt{n}e^{-nx^2}y = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{n\to\infty} y_n$.

(13) Siano y_1 e y_2 rispettivamente le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = c_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y \\ y(0) = c_2. \end{cases}$$

Provare che se $|c_1 - c_2| < \varepsilon$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta $|y_1(t) - y_2(t)| < C(t)\varepsilon$.

Provare inoltre che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono condizioni iniziali $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $|c_1 - c_2| < \varepsilon$, e

$$\lim_{t\to+\infty} |y_1(t) - y_2(t)| = +\infty.$$