Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)

Foglio Esercizi di Verifica consegnato il 22 maggio 2009

Esercizio 1.

Tizio e Caio eseguono contemporaneamente una serie di lanci di dadi.

Indichiamo rispettivamente con X, Y e Z il numero di lanci necessari fino a che si osservi per la prima volta: un asso per Tizio, un asso per Caio, un asso per Tizio e Caio nello stesso colpo.

a) Qual è la probabilità di $(Z > 5)$?

b) Qual è la probabilità di $(X > 5, Y > 5)$?

c) Qual è la probabilità di $(X > 5|X + Y = 8)$?

Esercizio 2.

Siano X una variabile di Poisson di parametro λ. Trovare il valore di k che massimizza $\mathbf{P}(X = k)$.

Esercizio 3.

Supponiamo che, relativamente ai corsi (indichiamoli con A, B e C) del secondo semestre del primo semestre, per ciascuno studente sia uguale a $1/5$ la probabilità di superare per primo l'esame A, $2/5$ la probabilità di superare per primo l'esame B, $2/5$ la probabilità di superare per primo l'esame C.

Consideriamo un gruppo di 12 studenti del primo anno ed indichiamo con X_A il numero di essi che superano per primo l'esame A; analogamente definiamo X_B e X_C.

a) Calcolare $\mathbf{P}\{X_A + X_B = 8\}$.

b) Calcolare $\mathbf{P}\{X_A = 4|X_B = 4\}$.

c) Calcolare il valore atteso condizionato $\mathbb{E}(X_C|X_A = 0)$.

Esercizio 4.

$r = 4$ oggetti si distribuiscono fra $n = 5$ siti.

Scrivere la probabilità del risultato

$$(1, 0, 1, 0, 2),$$

assumendo, rispettivamente, i modelli di Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac, Bose-Einstein.

Esercizio 5.

Per un adulto, il numero di raffreddori in un dato anno ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 5$. È stata appena messo in commercio un nuovo farmaco che mira a ridurre il parametro della Poisson a $\lambda = 3$. Tale farmaco però non ha effetto su tutta la popolazione ma soltanto sul 75% della popolazione; per il restante 25% il farmaco è inefficace.

a) Per una persona che assume regolarmente il farmaco, qual è la probabilità di avere esattamente due raffreddori nell'arco di un anno, rispettivamente nelle due ipotesi alternative in cui il farmaco ha avuto effetto o non ha avuto effetto?

Mevio assume regolarmente il farmaco e nell'arco di un anno ha 2 raffreddori.

b) Con quale probabilità il farmaco è stato efficace?

Esercizio 6.

Supponiamo che il numero di figli in una famiglia scelta caso soddisfi

$$\mathbf{P}(N = n) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

per $n = 0, 1, \ldots$

- Qual è la probabilità che la famiglia non abbia figli?
- Calcolare l'attesa di N.

Supponiamo ora che i figli siano con uguale probabilità maschi o femmine e sia X il numero di femmine in una famiglia scelta a caso.

- Calcolare $\mathbb{E}(X|N)$ e $\mathbb{E}(X)$.

Esercizio 7.

A una partita di calcio informale Luciano invita X giocatori e Giuseppe invita Y giocatori. Si può assumere che X e Y siano variabili aleatorie di Poisson indipendenti, rispettivamente di parametri 20 e 30. Ciascuno degli amici di Luciano si presenta alla partita con probabilità $\frac{3}{4}$ mentre, per quelli di Giuseppe, tale probabilità è uguale a $\frac{1}{2}$.

a) Calcolare la probabilità che in campo ci siano almeno 5 giocatori.

b) Calcolare la probabilità che si presentino esattamente 15 amici di Giuseppe.

c) Calcolare quanti giocatori- in media - saranno in campo.

d) Sapendo che Luciano ha invitato 15 amici (ovvero che $X = 15$), calcolare quanti giocatori- in media - saranno in campo.

Esercizio 8.

Andrea e Bruno organizzano il seguente giuoco. Andrea lancia una moneta equa tre volte**;** se viene sempre testa vince, altrimenti la mano passa a Bruno. In tal caso Bruno lancia la moneta due volte, se vengono due teste vince, altrimenti la mano ritorna ad Andrea. Andrea lancia la moneta tre volte; se viene sempre testa vince, altrimenti la mano torna a Bruno e così via.

a) Calcolare la probabilità che Andrea vinca nella sua seconda serie di lanci.

b) Calcolare le probabilità di vittoria di Andrea e Bruno, rispettivamente. È possibile che il giuoco continui all'infinito?

c) Sapendo che vince Andrea, calcolare la probabilità che abbia fatto le tre teste nella sua seconda serie di lanci.

d) Sapendo che vince Andrea, calcolare il valore atteso del numero di serie di lanci che gli sono servite.

Esercizio 9.

Si consideri una catena di Markov con spazio degli stati $\{A, B, C\}$ e con matrice di probabilità di transizione data da

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

a) Qual è la probabilità dell'osservazione $\{X_0 = A, X_1 = B, X_3 = B\}$?

b) Determinare π, la legge stazionaria (invariante) della catena.

c) Calcolare $\mathbf{P}\{X_4 = C|X_2 = A\}$ e, assumendo che la distribuzione di X_0 sia π, calcolare $\mathbf{P}\{X_2 = A|X_4 = C\}$.

Esercizio 10.

Sia X_n una catena di Markov con spazio degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e con probabilità di transizione:

$p_{12} = p_{13} = p_{15} = \frac{1}{3}$; $p_{21} = p_{23} = p_{23} = \frac{1}{3}$;
$p_{33} = p_{35} = \frac{1}{2}$; $p_{44} = p_{53} = 1$;

e distribuzione iniziale $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$.

b) Calcolare le probabilità che $X_1 = 5$ e la probabilità che $X_2 = 5$.

b) Calcolare le probabilità che $X_0 = 1$ sapendo che $X_2 = 5$.