Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilita' I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Foglio Esercizi di Verifica
consegnato il 27 marzo 2009

Esercizio 1. Se il 5% degli automobilisti non si ferma col rosso, trovare la probabilità che almeno 2 dei prossimi 100 automobilisti non si fermerà col rosso.

Esercizio 2. In un cassetto ci sono 10 guanti sinistri e 12 guanti destri. Prendiamo 4 guanti a caso. Trovare la probabilità che di avere due paia di guanti.

Esercizio 3. Un test clinico dà risultato "positivo" con probabilità 0.9 **se** è effettuato su una persona che ha contratto un certo tipo di infezione; il test dà invece risultato "positivo" con probabilità 0.15 **se** è effettuato su una persona "sana" (cioè che non ha contratto quel tipo di infezione).

Se una stessa persona ripete il test più volte (rimanendo ovviamente invariato il suo stato di salute, cioè rimanendo sempre infetto o sempre sano), allora i risultati ottenuti sono stocasticamente indipendenti fra di loro e con probabilità date come sopra, **a seconda che** sia infetta o sana. Caio si sottopone al test **4 volte consecutive**.
a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$\boldsymbol{E} = \{\textit{\textbf{Caio ottiene due volte risultato "positivo" e due volte risultato "negativo"}}\}$$

nelle tre seguenti diverse situazioni:

a1) Caio è sano

a2) Caio è infetto

a3) Non è certo se Caio sia sano o infetto e queste due diverse ipotesi alternative hanno rispettivamente probabilità del 60% e del 40%.

b) Nella situazione a3), quanto vale la probabilità condizionata dell'ipotesi che Caio sia sano **dato che** è stato osservato il risultato E?

Esercizio 4. Sia Ω l'insieme dei risultati possibili del lancio di un dado con k facce, con k numero primo. Siano $A, B \subset \Omega$. Che cosa possiamo dire circa A, B se sappiamo che sono indipendenti?

Esercizio 5. Si lanciano due dadi a 6 facce e si indicano con X, Y i due punteggi ottenuti. Mostrare che $\{X + Y = 7\}$ è indipendente dall'evento $\{X = k\}, k = 1, 2, ..., 6$.

Esercizio 6. Inviamo un messaggio composto da simboli *1* e *0.* In media il rapporto fra il numero degli 0 ed il numero degli 1 è uguale a $\frac{3}{4}$. Per problemi di rumore sulla linea ogni simbolo *0* ha una probabilità uguale a $\frac{1}{4}$ di essere ricevuto come *1* e, viceversa, ogni simbolo *1* ha una probabilità uguale a $\frac{1}{3}$ di essere ricevuto come *0.* Calcolare

a) la probabilità che un simbolo venga ricevuto come *1*

b) la probabilità che un simbolo ricevuto come *1* sia stato effettivamente inviato come *1.*

Esercizio 7. Siano A, B due eventi con $P(A) > 0$. Mostrare che

$$P\left(A \cap B | A\right) \geq P\left(A \cap B | A \cup B\right).$$

Esercizio 8. Un sistema ingegneristico, composto di diversi componenti, si dice essere un *parallelo* quando è capace di funzionare fintanto che funziona almeno uno dei suoi componenti.

Consideriamo ora un sistema parallelo costituito da n componenti $C_1, ..., C_n$, ciascuno dei quali, indipendentemente dagli altri, può essere funzionante o guasto con probabilità $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

a) Qual' è la probabilità che esattamente k componenti siano funzionanti?

b) Se sappiamo che il sistema è funzionante, come dobbiamo valutare la probabilità che sia funzionante C_1?