

Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Foglio Esercizi di Verifica
consegnato il 3 aprile 2009

Esercizio 1. L'urna A contiene 6 palline gialle e 4 palline rosse, mentre le urne B e C ne contengono 3 gialle e 7 rosse ciascuna. Viene scelta un'urna a caso fra A, B, C e da questa ne vengono estratte casualmente ed in blocco tre palline.

Si ponga $E = \{\text{le tre palline estratte sono tutte rosse}\}$

- a) Calcolare la probabilità di E sotto l'ipotesi che l'estrazione sia stata eseguita dall'urna A .
- b) Calcolare $P(E)$
- c) Condizionatamente all'osservazione dell'evento E , calcolare la probabilità che l'estrazione sia stata eseguita dall'urna A .

Esercizio 2. Dagli esami di maturità in una scuola secondaria del Lazio escono 100 diplomati, ciascuno dei quali decide, con probabilità costante 0.90 ed indipendentemente dagli altri, di iscriversi ad un corso di laurea universitario. Supponiamo inoltre che ciascun diplomato, fra quelli che decidono di iscriversi ad un corso di laurea, si iscriva alla Sapienza con probabilità $\frac{3}{4}$ indipendentemente dagli altri. Sia R il numero dei diplomati che si iscrivono ad un corso di laurea ed S il numero di quelli che si iscrivono ad un corso di laurea della Sapienza.

- a) Calcolare la probabilità dell'evento $\{R = i\}$ ($i = 0, 1, \dots, 100$)
- b) Calcolare $P(S = j|R = i)$ e $P(S = j, R = i)$.
- c) Calcolare $P(S = j)$.
- d) Calcolare $P(R = i|S = j)$.

Esercizio 3. Si hanno m esemplari di un certo tipo di telecomando (TC) per televisore; ciascun TC ha bisogno di due batterie per il suo funzionamento. Si hanno a disposizione $2m$ batterie, di cui però h cariche e $(2m - h)$ scariche. Da tale gruppo di batterie vengono costituite in modo casuale m coppie, che vengono inserite negli m TC.

Calcolare la probabilità che un fissato TC abbia entrambe le batterie cariche.

Esercizio 4. In una popolazione 1 persona su 100 è portatore di una certa malattia asintomatica.

Per diagnosticare la malattia è disponibile un test che ha le seguenti caratteristiche: un malato che si sottopone al test risulta positivo con probabilità del 90 per cento, mentre un individuo sano che si sottopone al test risulta positivo con probabilità del 10 per cento.

- a) Viene scelto a caso un individuo nella popolazione e sottoposto al test. Calcolare la probabilità che l'individuo risulti positivo.
- b) Viene scelto a caso un individuo nella popolazione e sottoposto al test. Calcolare la probabilità che l'individuo sia malato, condizionatamente al fatto che sia risultato positivo.
- c) Viene scelto a caso un individuo nella popolazione e sottoposto al test due successive volte. Calcolare la probabilità che l'individuo sia malato se risulta positivo sia al primo che al secondo test; (si presuppone che il secondo test venga effettuato indipendentemente dall'esito del primo).

Esercizio 5. Le lezioni di un certo insegnamento, per il quale sono previsti in tutto 35 distinti giorni di lezione, sono tenute in due canali paralleli dalla Professoressa U e dal Professor V.

Si supponga che, per ciascun singolo giorno, U e V abbiano ciascuno una probabilità uguale a 0.05 di essere assenti, indipendentemente uno dall'altro.

Si suppone anche l'indipendenza stocastica fra quanto avviene in giorni diversi.

- a) Qual è la probabilità che tutti e due facciano lezione in un giorno prefissato?
- b) Qual è la probabilità che soltanto uno dei due (non importa quale) faccia lezione in un giorno prefissato?
- c) Qual è la probabilità che nessuno dei due faccia lezione in un giorno prefissato?
- d) Qual è la probabilità che esattamente in due giorni sui 35 vi sia almeno un canale che non ha avuto lezione?

Esercizio 6. In un seggio elettorale ci sono tre diverse sezioni, diciamo 1, 2 e 3; ognuna prevede 30 elettori. Supponiamo di sapere che:

nella sezione 1, 20 elettori votano per lo schieramento A e 10 per lo schieramento B

nella sezione 2, 15 elettori votano per lo schieramento A e 15 per lo schieramento B

nella sezione 3, 10 elettori votano per lo schieramento A e 20 per lo schieramento B

- a) Qual è la probabilità che, su tre elettori scelti a caso (senza reinserimento) da quelli iscritti alla sezione 1, due votino per A ed uno per B?

Supponiamo ora di sapere che i tre elettori sono stati scelti a caso (senza reinserimento) da quelli iscritti ad una delle tre sezioni, ma non sappiamo da quale e attribuiamo probabilità $1/3, 1/3, 1/3$ alle tre possibilità

- b) in tal caso quanto vale la probabilità che, sui tre elettori scelti, due votino per A ed uno per B?
- c) Qual è la probabilità condizionata che i tre elettori provengano dalla sezione 2, sapendo che due di loro votano per A ed uno per B?

Esercizio 7. Si lancia una moneta 10 volte. Trovare la probabilità di avere non più di cinque teste, sapendo di avere almeno tre teste.

Esercizio 8. Un'urna contiene N palle; b sono bianche e $r (= N - b)$ sono rosse. Si estraggono in blocco n palle.

- a) trovare la probabilità che k di queste siano bianche

Adesso $N \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ in modo che $\frac{b}{N} \rightarrow p$ e $\frac{r}{N} \rightarrow 1 - p$.

- b) mostrare che la probabilità calcolata al punto precedente tende a $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Esercizio 9. I CD prodotti da una certa azienda sono difettosi con probabilità $\frac{1}{100}$. L'azienda li vende in confezioni da 10 e offre una garanzia di rimborso se almeno un CD è difettoso. Se una persona acquista 3 scatole, con quale probabilità ne restituisce esattamente una?