

**Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09**  
**Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)**  
**Foglio Esercizi di Verifica**  
**consegnato il 29 aprile 2009**

**Esercizio 1.** A, B, e C sono tre eventi di probabilità  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$  rispettivamente.

1. Indicando con  $X$  il numero di quanti fra questi eventi saranno verificati, calcolare  $\mathbb{E}(X)$
2. Qual è la probabilità che se ne verifichi almeno uno ( $X \geq 1$ ) se i tre eventi sono a due a due incompatibili?
3. Qual è la probabilità che se ne verifichi almeno uno ( $X \geq 1$ ) se i tre eventi sono completamente indipendenti?

**Esercizio 2.** Sia  $X$  una variabile aleatoria a valori in  $\{1, 2, \dots, n\}$  con densità discreta

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{ck}{n(n+1)}$$

1. Quanto deve valere  $c$ ?
2. Calcolare  $\mathbb{E}(X)$ .

**Esercizio 3.** Tizio possiede 2 biglietti di una lotteria ed 1 biglietto di una diversa lotteria.

Nella prima lotteria vengono distribuiti 20 premi da 800 Euro; nella seconda lotteria vengono distribuiti 5 premi da 2000 Euro e 12 premi da 1000 Euro. Il numero dei biglietti venduti è 1000 sia nella prima che nella seconda lotteria.

Indichiamo con  $X$  la vincita complessiva di Tizio.

1. Calcolare  $\mathbb{P}(X > 0)$ ;
2. Calcolare  $\mathbb{E}(X)$ .

**Esercizio 4.** Due giocatori lanciano una moneta perfetta 4 volte ciascuno ed il vincitore è quello fra i due che realizza il maggior numero di risultati testa.

Indichiamo con  $X$  il punteggio del vincitore e con  $Y$  il punteggio del perdente.

1. Trovare  $\mathbb{E}(X + Y)$ ;
2. Trovare  $\mathbb{E}(X - Y)$ ;
3. Trovare  $\mathbb{E}(X - Y)$  nel caso in cui i due giocatori lancino la moneta un numero generico  $n$  di volte ciascuno.

**Esercizio 5.** Un test consiste di 10 domande a risposta multipla: ci sono 4 risposte possibili di cui 1 è quella giusta.

Per superare il test bisogna rispondere correttamente ad almeno 8 domande.

1. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso?
2. E qual è la media delle risposte esatte?

**Esercizio 6.** Un libro delle scommesse suggerisce la seguente “strategia vincente” per il gioco della roulette. Raccomanda che si scommetta un euro sul rosso. Se esce il rosso (che ha probabilità pari a  $18/37$  di uscire), allora il giocatore deve prendere la sua vincita di un euro e andarsene. Se invece perde la prima giocata (evento di probabilità pari a  $19/37$ ), deve fare una ulteriore giocata di 1 euro per i successivi due giri della roulette e quindi lasciare il gioco. Denotiamo con  $X$  la variabile aleatoria che indica la vincita del giocatore quando lascia il tavolo.

1. Si determini  $\mathbb{P}(X > 0)$ ;
2. Siete d'accordo che questa sia effettivamente una strategia vincente?;
3. Si determini  $\mathbb{E}(X)$ .

**Esercizio 7.** Una compagnia di assicurazioni emette una polizza che pagherà una certa quantità  $A$  di euro se *un evento prefissato*  $E$  si verificherà entro un anno.

Se la compagnia stima che  $E$  si verificherà entro un anno con probabilità pari a  $p$ , quale dovrebbe essere il costo della polizza per il cliente in modo che il profitto atteso per la compagnia sia del 10 per cento di  $A$ ?

**Esercizio 8.**  $A$  e  $B$  giocano al seguente gioco:  $A$  scrive un numero 1 o 2 e  $B$  deve indovinare quale numero ha scritto.

Se  $A$  ha scritto il numero  $i$  e  $B$  lo ha indovinato,  $B$  riceve  $i$  euro da  $A$ .

Se  $B$  sbaglia, paga  $3/4$  di euro ad  $A$ .

Se  $B$  randomizza la propria decisione scegliendo 1 con probabilità pari a  $p$  e 2 con probabilità pari a  $1 - p$ , si determini il suo guadagno atteso nei due casi

1.  $A$  ha scritto il numero 1;
2.  $A$  ha scritto il numero 2.

Quale valore di  $p$  massimizza il minimo possibile guadagno atteso di  $B$  e quanto vale questo minimo guadagno? (Si noti che il guadagno atteso di  $B$  dipende non solo da  $p$  ma anche da che cosa scriverà  $A$ ).

**Esercizio 9.** Quattro autobus portano 148 studenti allo stadio. Gli autobus portano, rispettivamente, 40, 33, 25 e 50 studenti. Scegliamo a caso uno degli studenti. Denotiamo con  $X$  il numero degli studenti che hanno viaggiato sull'autobus dello studente scelto a caso. Scegliamo ora a caso uno dei conducenti dei bus e denotiamo con  $Y$  il numero degli studenti che hanno viaggiato sul suo autobus.

1. Quale tra  $\mathbb{E}(X)$  e  $\mathbb{E}(Y)$  pensate sia più grande? Perché?
2. Si calcolino  $\mathbb{E}(X)$  e  $\mathbb{E}(Y)$ .