Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Foglio Esercizi di Verifica consegnato l'8 maggio 2009

Esercizio 1. Siano X ed Y due variabili aleatorie la cui distribuzione di probabilità congiunta è indicata nella seguente tabella (per entrambe l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$):

Y/X	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
-2	0	0.1	0	0	c
-1	0.1	0.1	c	0	0
0	0	c	0	0.125	0
1	0	0	0.125	c	c
2	c	0	0	c	0.1

Per esempio $\mathbf{P}(X = 1, Y = 0) = 0.125$.

1. Determinare il valore di c.
2. Calcolare $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \mathbf{V}ar(X)$.
3. Calcolare $\mathbf{E}(X \cdot Y)$ e $\mathbf{C}ov(X, Y)$.
4. Calcolare $\mathbf{C}ov(2X - 1, -Y)$.
5. Verificare se X e Y sono indipendenti.
6. Calcolare la distribuzione condizionata di Y dato $X = 1$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con la seguente distribuzione di probabilità:

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = 0.45 - p$$
$$\mathbf{P}\{X = 0.5\} = 0.3$$
$$\mathbf{P}\{X = 1\} = 0.25$$
$$\mathbf{P}\{X = 2\} = p$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro.

1. Trovare il valore di p per cui risulta $E(X) = 1$.
2. In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la varianza di X.

Esercizio 3. Siano U_1, U_2, U_3, U_4 i risultati del lancio di 4 dadi a quattro facce. Poniamo

$$X = U_1 + U_2; \qquad Y = \max(U_1, U_2);$$
$$Z = \max(U_2, U_3); \qquad W = \max(U_3, U_4).$$

1. Scivere la distribuzione di X e di Y
2. Scivere la distribuzione congiunta delle coppie (X, Y), (X, Z),(X, W) e le rispettive covarianze.

Esercizio 4. Sia X una variabile aletoria ipergeometriva di parametri N, r, n ovvero $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Calcolare la varianza di X.

Esercizio 5. Per una variabile aleatoria N a valori interi non negativi si dimostri:

$$\mathbf{E}[N] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i)$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N \geq i) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}[N^2] - \mathbf{E}[N])$$

Esercizio 6. Due dadi equilibrati a sei facce vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci necessario a a ottenere 1 con il primo dado e con Y il numero di lanci necessario a a ottenere 5 o 6 con il secondo.

1. Qual è la distribuzione di X? Qual è la distribuzione di Y?
   Quanto valgono $\mathbf{E}(X)$ e $\mathbf{E}(Y)$?
2. Calcolare la densità di $Z = \max(X, Y)$. Quanto vale $\mathbf{E}(Z)$?
3. Calcolare $\mathbf{P}(X \geq Y)$.

Esercizio 7. I numeri del lotto vengono estratti uno dopo l'altro dall'urna senza rimpiazzo.

Diciamo che si ha una *coincidenza* (match) se la pallina numero i viene estratta esattamente alla i-esima estrazione. Indichiamo con A_i l'evento {si ha coincidenza alla i-esima estrazione}.

1. Quanto vale $P(A_i)$? Gli eventi $A_1, ..., A_{90}$ sono indipendenti? Sono indipendenti a due a due?

2. Indichiemo con X il numero di coincidenze che si sono verificate nelle 90 estrazioni. Quanto vale $E(X)$? Quante coincidenze si verificherebbero in media se le palline invece di 90 fossero 1024?

3. Quanto vale la varianza di X?

Esercizio 8. Siano X e Y variabili aleatorie a valori discreti indipendenti fra loro. Dimostrare che anche $f(X)$ e $f(Y)$ sono variabili aleatorie indipendenti fra loro.

Esercizio 9.
Si consideri la seguente equazione

$$x^2 - 2x + A = 0$$

dove A è una variabile aleatoria con distribuzione

$$P(A = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, \qquad P(A = \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}, \qquad P(A = \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}.$$

Per ogni valore di A l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte che chiameremo X_1 e X_2, con $X_1 < X_2$. Dopo aver espresso X_1, X_2 in funzione di A,

a) Calcolare $\mathbf{E}(X_2 - X_1)$;

b) Calcolare $\mathbf{V}ar(X_2 - X_1)$.