Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)

Foglio Esercizi di Verifica consegnato il 15 maggio 2009

Esercizio 1. Due squadre si sfidano in una serie di incontri; la prima che vince 4 partite è dichiarata vincitice della sfida. Supponiamo che una delle squadre sia più forte dell'altra e vinca ogni partita con probabilità $\frac{3}{5}$. Calcolare la probabilità che la squadra più forte vinca la sfida in esattamente i incontri. Confrontare il risultato con una sfida al meglio delle tre partite. Se le due squadre si equivalgono (ovvero ognuna vince un singolo incontro con probabilità $\frac{1}{2}$), si calcoli il valore atteso del numero di partite che vengono giocate.

Esercizio 2. Un'urna contiene 112 dadi di cui 56 sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che la probabilità di ottenere 1 sia $\frac{1}{2}$, mentre quella di ottenere gli altri 5 valori sia $\frac{1}{10}$.

Un dado viene estratto a caso e lanciato. Indichiamo con X il risultato del lancio. Quanto vale $\mathbf{P}(X = 3)$? quanto vale $\mathbf{E}(X)$?

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità data da

$$p_X(n) = c * \frac{1}{n!} \text{ n = 0, 1, 2, ...}$$
$$p_X(n) = 0 \text{ altrimenti}$$

.

1. Calcolare c (Suggerimento: utilizzare il fatto che $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$);
2. Calcolare la probabilità che X sia pari;
3. Calcolare il valore atteso di X.

Esercizio 4.

Un'apparecchiatura è difettosa. Premendo un bottone:

- con probabilità $\frac{2}{5}$ funziona correttamente e impiega 5 minuti a portare a termine la propria funzione

- con probabilità $\frac{3}{5}$ si blocca: se questo avviene, allora:
    1. con probabilità $\frac{1}{2}$ si blocca per 1 minuto,
    2. con probabilità $\frac{1}{2}$ si blocca per 3 minuti,

e premendo di nuovo il bottone si può ritentare di farla funzionare.

Sia T il tempo trascorso sino a quando la macchina porta a termine la propria funzione, e sia N il numero di volte che è necessario premere il pulsante.

4a) calcolare $\mathbf{E}(N)$;

4b) calcolare $\mathbf{E}(T|N)$;

4c) calcolare cov (T, N).

Esercizio 5.

X è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro λ tale che $P(X = 0) = P(X = 1)$. Quanto vale il parametro λ ?

Esercizio 6.

Dopo aver lanciato un dado a sei facce, effettuiamo un numero di lanci di una moneta non truccata pari al risultato del tiro del dado. Quale è la probabilità di non ottenere mai testa? Quale è il valore atteso del numero di teste?

Esercizio 7. Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Per ogni $k \leq n$ poniamo $X_k = 1$ se il k-esimo lancio ha dato testa e $X_k = 0$ se ha dato croce. Indichiamo con $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ la proporzione di teste negli n lanci.

Usando la disuguaglianza di Chebishev, trovare una minorazione per $P(| \overline{X}_n - \frac{1}{2} | \leq 0.1)$, per $n = 900$.

Esercizio 8.

Una coppia di dadi a 6 facce viene lanciata n volte. Indichiamo con S_n il numero dei lanci in cui il maggiore fra i due punteggi risulta maggiore o uguale a 5.

Calcolare il minimo valore di n per il quale, in base alla disuguaglianza di Chebishev, si possa scrivere

$$P\{\mid \frac{S_n}{n} - \frac{5}{9} \mid > \frac{1}{30}\} \leq \frac{1}{10}$$

Esercizio 9. Una moneta dà testa con probabilità p. La moneta viene tirata n volte e si osserva la percentuale $\overline{Y}_n$ di teste uscite su n lanci, cioè il rapporto tra il numero di teste uscite e il numero totale di lanci. Quanto deve essere grande n affinchè con probabilità maggiore di 0.99 l'errore commesso (cioè la differenza tra p e $\overline{Y}_n$) sia al più 0.1?

Esercizio 10. Siano $X_1, ..., X_{100}$ variabili aleatorie indipendenti, tutte con la seguente distribuzione di probabilità

$$P\{X_j = 0\} = 0.45 - p$$

$$P\{X_j = 1\} = 0.25$$

$$p\{X_j = 2\} = 0.3$$

$$P\{X_j = 3\} = p$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro. Sia

$$Y = \sum_{j=1}^{100} X_j$$

- **a)** Trovare il valore di p per cui risulta $E(Y) = 100$.
- **b)** In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la $Var(Y)$.
- **c)** Ancora in corrispondenza allo stesso valore di p, trovare una magiorazione per la probabilità $P(86 \leq Y \leq 114)$.