Calcolo delle Probabilità I

Soluzioni Esercizi di Verifica dell'8 maggio 2009

Esercizio 1.

1. La somma dei valori in tabella è $0.65 + 7c$. da cui $c = 0.05$

2. Conviene fare prima la marginale di X (e osservare che la tabella è simmetrica, quindi quella di Y è uguale). Poi si applica la definizione per calcolare attesa e varianza.

3. Per calcolare $\mathbf{E}(X \cdot Y)$, usare la definizione. Gli addendi sono quasi tutti 0.

4. $\mathbf{C}ov(2X - 1, -Y) = \mathbf{C}ov(2X, -Y) = -2\mathbf{C}ov(X, Y) = \ldots$

5. X e Y non sono indipendenti, infatti $\mathbf{P}(X = -2) = \mathbf{P}(Y = -2) = 0.15$,
   mentre $\mathbf{P}(X = -2 \cap Y = -2) = 0$

6. Abbiamo $\mathbf{P}(X = 1) = 0.225$.
   Quindi $\mathbf{P}(Y = -2|X = 1) = 0$; $\mathbf{P}(Y = -1|X = 1) = 0$; $\mathbf{P}(Y = 0|X = 1) = \frac{0.125}{0.225} = \frac{5}{9}$;
   $\mathbf{P}(Y = 1|X = 1) = \frac{0.125}{0.225} = \frac{2}{9}$; $\mathbf{P}(Y = 2|X = 1) = \frac{0.125}{0.225} = \frac{2}{9}$.

Esercizio 2.

1.
$$\mathbb{E}(X) = (0.45 - p) \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 1 + p \cdot 2 = 0.4 + 2p$$
   quindi $\mathbb{E}(X) = 1$ implica
$$p = 0.3$$

2.
$$\mathbb{E}(X^2) = 0.25 \cdot 0.3 + 0.25 + 4 \cdot 0.3 = 1.525$$
   da cui
$$Var(X) = 0.525$$

Esercizio 3.

1. Si puo' semplicemente elencare in una matrice 4×4 l'insieme dei possibili risultati per U_1 e U_2.
$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}$$

Si vede che $X = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, e indicando con $p_i, i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ le relative probabilita', che risultano proporzionali al numero di elementi sulle antidiagonali della matrice, si ha

$$p_2 = \frac{1}{16}, \quad p_3 = \frac{2}{16}, \quad p_4 = \frac{3}{16}, \quad p_5 = \frac{4}{16}, \quad p_6 = \frac{3}{16}, \quad p_7 = \frac{2}{16}, \quad p_8 = \frac{1}{16}.$$

La stessa matrice fornisce la distribuzione di Y, stavolta si puo' partire dal risultato $(1, 1)$, e a ogni passo contare quanti sono i primi vicini non gia' contati che ha l'insieme contato al passo precedente

$$p_1 = \frac{1}{16}, \quad p_2 = \frac{3}{16}, \quad p_3 = \frac{5}{16}, \quad p_4 = \frac{7}{16}$$

ed e' facile capire che ogni nuovo "contorno" ha due elementi un piu' del precedente.

2.

Esercizio 4.

Possiamo pensare a X come al risultato del seguente esperimento: una scatola contiene N palle di cui r bianche e il resto nere; ne vengono estratte n. X conta il numero di palle bianche fra quelle estratte.

Immaginiamo un'estrazione sequenziale delle n palle. Sia A_i l'evento {la i-esima palla è bianca}. Allora

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$$

Quindi $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(I_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = \frac{nr}{N}$.

Il calcolo di $\mathbb{E}(X^2)$ si fa in maniera analoga.

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n} I_{A_i})^2] = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}(I_{A_i} I_{A_j}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{90} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le 90} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) =$$

$$\frac{nr}{N} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{r(r-1)}{N(N-1)}$$

Esercizio 5.

$$\mathbf{E}[N] = \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\mathbf{P}(N = i) \sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{j=1}^{\infty} 1 \sum_{i=j}^{\infty} \mathbf{P}(N = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \ge i)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j} i\mathbf{P}(N = j) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = j) \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}[N^2] - \mathbf{E}[N])$$

Esercizio 6. Due dadi equilibrati a sei facce vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci necessario a a ottenere 1 con il primo dado e con Y il numero di lanci necessario a a ottenere 5 o 6 con il secondo.

1. Qual è la distribuzione di X? Qual è la distribuzione di Y?
   Quanto valgono $\mathbf{E}(X)$ e $\mathbf{E}(Y)$?

2. Calcolare la densità di $Z = \max(X, Y)$. Quanto vale $\mathbf{E}(Z)$?

3. Calcolare $\mathbf{P}(X \geq Y)$.

Soluzione

X è geometrica di parametro $\frac{1}{6}$; Y è geometrica di parametro $\frac{1}{3}$,
ovvero $\mathbf{P}(X \leq k) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$ e $\mathbf{P}(Y \leq k) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k$ quindi $\mathbf{E}(X) = 6$ e $\mathbf{E}(Y) = 3$.

$$\mathbf{P}(Z \leq k) = \mathbf{P}(X \leq k \cap Y \leq k) = \mathbf{P}(X \leq k)\mathbf{P}(Y \leq k) =$$
$$\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right)$$
$$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leq k) - \mathbf{P}(Z \leq k-1)$$
$$\mathbb{E}(Z = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(Z = k) = \frac{31}{4}$$

$$\mathbf{P}(X \geq Y) = \sum_k \mathbf{P}(X \geq Y | Y = k)\mathbf{P}(Y = k) = \sum_k \mathbf{P}(X \geq k)\mathbf{P}(Y = k)$$
$$= \sum_k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{3}{4}$$

Esercizio 7.

Gli eventi sono scambiabili, quindi $\mathbf{P}(A_i)$ non dipende da i e $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{90}$.
Gli eventi non sono indipendenti, nemmeno due a due, infatti $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{89 \cdot 90}$

$X = \sum_{i=1}^{90} I_{A_i}$; $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{90} \mathbb{E}(I_{A_i}) = \sum_{i=1}^{90} \mathbf{P}(A_i) = 1$. Lo stesso se sono 1024.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i,j=1}^{90} \mathbb{E}(I_{A_i} I_{A_i}) = \sum_{i,j=1}^{90} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = 1 + 2 \sum_{1 \le i < j \le 90} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = 1 + 90 \cdot 89 \cdot \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = 2$$

Esercizio 8.

Abbiamo

$$\{f(X) = h \cap f(Y) = k\} = \bigcup_{i:f(i)=h,\, j:f(j)} \{X = i \cap Y = j\}$$

Quindi

$$\mathbf{P}(f(X) = h \cap f(Y) = k) = \sum_{i:f(i)=h,\, j:f(j)} \mathbf{P}(X = i \cap Y = j) = \sum_{i:f(i)=h,\, j:f(j)} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j) =$$
$$= \sum_{i:f(i)=h} \mathbf{P}(X = i) \cdot \sum_{j:f(j)} \mathbf{P}(Y = j) = \mathbf{P}(f(X) = h)\mathbf{P}(f(Y) = k)$$

Esercizio 9.

Risolvendo l'equazione e semplificando si trova $X_2 - X_1 = 2\sqrt{1 - A}$.
Quindi $\mathbb{E}(X_2 - X_1) = 2\mathbb{E}(\sqrt{1 - A}) = \ldots$
e $\mathbb{E}[(X_2 - X_1)^2 = 4 - 4\mathbb{E}(A) = \ldots$