Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Soluzioni della prova scritta del 20-01-2010

Esercizio 1.

a) X è binomiale di parametri 5 e $\frac{1}{6}$. Quindi $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{25}{36}$.

b) Sia A_i l'evento $\{$*in tre lanci del dado i-esimo esce almeno un "***6***"*$\}$ e I_i la sua funzione indicatrice. Abbiamo $\mathbb{P}(A_i) = 1 - (\frac{5}{6})^3 = \frac{91}{216}$ e possiamo scrivere $Y = \sum_{i=1}^{5} I_i$. Quindi Y è binomiale di parametri 5 e $\frac{91}{216}$ e $\mathbb{E}(Y) = \frac{455}{216}$.

c) La probabilità di ottenere almeno un "**6**" in due lanci è $1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{1}{4}$. Sia $Z = Y - X$. Condizionatamente all'evento $\{X = k\}$, Z è binomiale di parametri $5 - k$ e $\frac{1}{4}$. Quindi abbiamo

$$\mathbb{E}(Y|X = k) = \mathbb{E}(Z+X|X = k) = \mathbb{E}(Z|X = k)+k = \frac{1}{4}(5-k)+k = \frac{1}{4}(5+3k)$$

e $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{1}{4}(5 + 3X)$.
$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(5X + 3X^2) = \frac{1}{4}(\frac{25}{6} + \frac{25}{6}) = \frac{25}{12}$
e $\mathbf{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{25}{12} - \frac{455}{216} \cdot \frac{5}{6} = \frac{425}{1296}$.

Esercizio 2.

a) Indichiamo con M un membro di maggioranza e con m un membro di minoranza.

$$\mathbf{P}(1^a m \,|\, 2^a M) = \frac{\mathbf{P}(mM)}{\mathbf{P}(MM) + \mathbf{P}(mM)} = \frac{\frac{4}{10}\frac{7}{10}}{\frac{6}{10}\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\frac{7}{10}} = \frac{14}{29}$$

b)

$$\mathbf{P}(\text{i 3 membri estratti sono tutti dell'opposizione}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}$$

c) Sia $A = (mmm) \bigcup (MMM)$ e χ_A la sua funzione indicatrice. Allora χ_A e' una variabile di Bernoulli di parametro $p = \mathbf{P}(A)$ e $X = 2 - \chi_A$. Quindi $\mathbb{E}(X) = 2 - p$ e $\mathbf{V}\mathrm{ar}(\chi_A) = \mathbf{V}\mathrm{ar}(X) = p(1-p)$. Poiché

$$p = \mathbf{P}(mmm) + \mathbf{P}(MMM) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4}{1000} = \frac{18}{125}$$

si ottiene

$$\mathbb{E}(X) = \frac{232}{125}\ , \quad \mathbf{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{18 \times 107}{125^2}\ .$$

Esercizio 3.

a)

$$\mathbf{P}(Y = 4 \,|\, X = 10) = \binom{10}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

b) La distribuzione di Y dato $\{X = n\}$ è binomiale di parametri n e $p = 3/4$, ovvero

$$\mathbf{P}(Y = k \,|\, X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k \,|\, X = n)\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda}(p\lambda)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{(n-k)} \lambda^{(n-k)} =$$

$$e^{-\lambda}(p\lambda)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ((1-p)\lambda)^n = e^{-p\lambda}(p\lambda)^k \frac{1}{k!}$$

Quindi Y ha distribuzione di Poisson di parametro $p\lambda = 3\lambda/4$.

c)

$$\mathbb{E}(X) = \lambda;\ \mathbf{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda$$

$$\mathbb{E}(Y \,|\, X) = \frac{3X}{4};\ \mathbb{E}(Y) = \frac{3\lambda}{4};\ \mathbf{V}\mathrm{ar}(Y) = \frac{3\lambda}{4}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid X)) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y \mid X)) = \mathbb{E}(3X^2/4) = \frac{3}{4}(\lambda^2 + \lambda)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 3\lambda/4 = p\lambda$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{C}\mathrm{ov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}\mathrm{ar}(X)\mathbf{V}\mathrm{ar}(Y)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{p}$$

Esercizio 4.

a) Sia π tale matrice. Dai dati forniti si trova

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{P}(X_2 = A) = p_{A\,B}p_{B\,A} + p_{A\,C}p_{C\,A} = \frac{2}{3}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = B) = \mathbf{P}(X_2 = C) = p_{A\,C}p_{C\,B} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

c)

$$\mathbf{P}(X_3 = C) = \mathbf{P}(X_2 = A)p_{A\,C} + \mathbf{P}(X_2 = B)p_{B\,C} = \frac{7}{18}$$

d) Si deve risolvere il problema lineare

$$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = (x,\ y,\ z)$$

Si vede subito dal fatto che il vettore è una distribuzione di probabilità e dalla simmetria del problema rispetto allo scambio tra gli stati B e C che la soluzione deve essere del tipo $(x, y, z) = (1 - 2\alpha, \alpha, \alpha)$. Si trova la soluzione $(4/10, 3/10, 3/10)$.