Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Soluzioni della prova scritta del 8-9-2009

Esercizio 1.

a)

$$\mathbf{P}(1^o\text{di geometria}, 2^o\text{di algebra}) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{12}$$

b) Ci sono in totale 16 libri e questi posso essere ordinati in 16! modi distinti. Ci sono 4! ordinamenti per i libri di algebra, 7! per quelli di analisi e 5! per quelli di geometria. Inoltre abbiamo 3! modi di ordinare le tre materie.

$$\mathbf{P}(\text{libri di ogni materia contigui}) = 3! \cdot \frac{4!\,7!\,5!}{16!}$$

c) Uno solo dei 4! ordinamenti dei libri di algebra rispetta l'ordine alfabetico. Analogamente per i libri di analisi e geometria.

$$\mathbf{P}(1^o\text{libri di ogni materia in ordine alfabetico}) = \frac{1}{4!\,7!\,5!}$$

d) Una volta fissato uno dei 3! ordinamenti possibili per le 3 materie, esiste un solo ordinamento possibile dei 16 libri.

$$\mathbf{P}(\text{libri di ogni materia in ordine alfabetico e contigui.}) = \frac{3!}{16!}$$

Osserviamo inoltre che l'evento qui descritto è l'intersezione degli eventi descritti ai punti b) e c) e la sua probabilità il prodotto delle probabilità di tali eventi, che risultano pertanto indipendenti.

Esercizio 2.

a)

$$\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) - \mathbf{P}(X = 1) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2} \simeq 0.594$$

b)

$$\mathbf{P}(X \geq 2 \,|\, X \geq 1) = \frac{\mathbf{P}(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{\mathbf{P}(X \geq 1)} == \frac{\mathbf{P}(X \geq 2)}{\mathbf{P}(X \geq 1)} =$$
$$\frac{1 - e^{-2} - 2e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1} \simeq 0.687$$

c)

$$\mathbb{E}(X \,|\, X \geq 1) = \sum_{k=1}^{k=\infty} k \cdot \mathbf{P}(X = k \,|\, X \geq 1) = \sum_{k=1}^{k=\infty} k \cdot \frac{\mathbf{P}(X = k)}{\mathbf{P}(X \geq 1)} =$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{k=\infty} k \cdot \mathbf{P}(X = k)}{\mathbf{P}(X \geq 1)} = \frac{2}{1 - e^{-2}}$$

d) Il numero Y di chiamanti che in una settimana chiedono della moglie di Luigi è una variablie di Poisson di parametro $p \cdot \lambda = \frac{2}{3}$. Di conseguenza

$$\mathbf{P}(Y = 0) = e^{-\frac{2}{3}} \simeq 0.513$$

Esercizio 3.

Chiamiamo U e V il risultato del lancio del primo e del secondo dado rispettivamente.

a) Calcolare la densità discreta di Y e il suo valore atteso $\mathbb{E}(Y)$.

$$\mathbf{P}(Y=1)=\mathbf{P}(U=1\cap V=1)=\mathbf{P}(U=1)\mathbf{P}(V=1)=\frac{1}{36}$$

$$\mathbf{P}(Y=2)=\mathbf{P}(U=2\cap V=1)+\mathbf{P}(U=1\cap V=2)+\mathbf{P}(U=2\cap V=2)=\frac{3}{36}$$

Analogamente

$$\mathbf{P}(Y=3)=\frac{5}{36};\ \mathbf{P}(Y=4)=\frac{7}{36};\ \mathbf{P}(Y=5)=\frac{9}{36};\ \mathbf{P}(Y=6)=\frac{11}{36}.$$

Infine

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\mathbf{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{2k-1}{36}=\frac{161}{36}$$

b) X e Y non sono indipendenti. Per esempio

$$\mathbf{P}(X=2)=\mathbf{P}(U=1\cap V=1)=\frac{1}{36};\ \mathbf{P}(Y=1)=\mathbf{P}(U=1\cap V=1)=\frac{1}{36}$$

$$\mathbf{P}(X=2\cap Y=1)=\mathbf{P}(U=1\cap V=1)=\frac{1}{36}\neq\mathbf{P}(X=2)\cdot\mathbf{P}(Y=1)$$

c) Gli eventi A e $\{X=5\}$ non sono indipendenti. Difatti

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(U>V)=\frac{1}{2}(1-\mathbf{P}(U=V))=\frac{5}{12};$$

$$\mathbf{P}(X=5)=\mathbf{P}(U=4,V=1)+\mathbf{P}(U=3,V=2)+$$

$$+\mathbf{P}(U=2,V=3)+\mathbf{P}(U=1,V=4)=\frac{1}{9};$$

$$\mathbf{P}(X=5\cap A)=\mathbf{P}(U=4,V=1)+\mathbf{P}(U=3,V=2)=\frac{1}{18}\neq\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{9}$$

Esercizio 4.

a) Dai dati forniti e ricordando che la matrice cercata $\mathbf{P}$ deve essere stocastica, si trova

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Ricordando che $\mathbf{P}(X_0 = 3) = 1$, troviamo

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = p_{3\,1}p_{1\,1} + p_{3\,2}p_{2\,1} = \frac{3}{8}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = p_{3\,1}p_{1\,2} + p_{3\,2}p_{2\,2} = \frac{3}{8}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = 3) = p_{3\,1}p_{1\,3} + p_{3\,2}p_{2\,3} = \frac{1}{4}$$

c)

$$\mathbf{P}(X_3 = 1) = \mathbf{P}(X_2 = 1)p_{1\,1} + \mathbf{P}(X_2 = 2)p_{2\,1} + \mathbf{P}(X_2 = 3)p_{3\,1} = \frac{13}{32}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 1 \,|\, X_3 = 1) = \frac{\mathbf{P}(X_3 = 1 \,|\, X_2 = 1)\mathbf{P}(X_2 = 1)}{\mathbf{P}(X_3 = 1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{13}{32}} = \frac{6}{13}$$

d) Si deve risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \end{cases}$$

Con la condizione $x + y + z = 1$

La soluzione è $x = \frac{2}{5};\ y = \frac{2}{5};\ z = \frac{1}{5}$.