

**Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/2009**  
**Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)**  
**1<sup>a</sup> Prova in Itinere - 27 Aprile 2009**

**Esercizio 1.** Si lancia 12 volte un dado a 6 facce.

- a) Trovare la probabilità di avere non più di sei volte il numero 3.
- b) Trovare la probabilità di avere non più di sei volte il numero 3, sapendo che esso si è presentato almeno tre volte.
- c) Trovare la probabilità di avere non più di sei volte il numero 3, sapendo che si sono presentati per almeno sette volte numeri dispari.

**Esercizio 2.** Un numero di telefono di sei cifre viene composto digitando a caso sulla tastiera (10 tasti).

- 0) Si considerino i numeri di sei cifre 121212 e 094816. Dire se tali due numeri sono equiprobabili o se uno dei due è più probabile dell'altro.

Dopo aver risposto a questa domanda, calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

- a) il numero di sei cifre formato non contiene il 6;
- b) il numero di sei cifre formato contiene solo cifre pari;
- c) il numero di sei cifre formato contiene la stringa 2345;
- d) il numero di sei cifre formato contiene la stringa 2222.

**Esercizio 3.** In un seggio elettorale composto complessivamente da 200 elettori, sia  $X$  il numero di elettori, iscritti al seggio, che effettivamente, al momento del voto, danno la loro preferenza allo schieramento  $A$ .

Dopo le votazioni svolgiamo un sondaggio (“exit-poll”) scegliendo in modo casuale  $n = 20$  elettori e domandando a ciascuno di loro per quale schieramento ( $A$  o  $C$ ) abbia votato. Indichiamo con  $Y$  il numero di elettori che tra i venti intervistati hanno votato per lo schieramento  $A$ , ( $Z = 20 - Y$  esprime il numero di elettori che hanno votato per lo schieramento  $C$  fra quelli intervistati).

- a) Supponendo di avere l’informazione  $\{X = 80\}$ , fornire una formula per calcolare la probabilità dell’evento

$$E \equiv \{Y = 8\} .$$

- b) Supponiamo ora di non avere, invece, informazioni certe sul valore di  $X$ . Sulla base di informazioni a priori (precedenti tornate elettorali, sondaggi pre-elezioni, etc.) valutiamo a priori

$$P\{X = k\} = \begin{cases} 0 & \text{per } k \leq 50 \text{ oppure } k \geq 151, \\ c & \text{per } 51 \leq k \leq 150, \end{cases}$$

dove  $c$  è una costante da determinare.

- b1) Calcolare la probabilità *a priori* dell’evento  $\{30 \leq X \leq 90\}$ .

Anche in questo caso svolgiamo, dopo le votazioni, il sondaggio tramite “exit-poll”, sempre su una base di  $n = 20$  elettori. Manteniamo nei due punti che seguono la notazione introdotta in precedenza.

- b2) Fornire una formula per calcolare la probabilità dell’evento  $E$ .  
b3) Per  $k = 51, \dots, 150$ , esprimere in formule la probabilità condizionata dell’evento  $\{X = k\}$ , data l’osservazione dell’evento  $E$ .

**Esercizio 4.** Dimostrare che, in uno spazio di probabilità finito  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ , due eventi  $A$  e  $B$  sono stocasticamente indipendenti se e solo se lo sono  $A^c$  e  $B^c$ .