Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/2009
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
2^a Prova in Itinere - 12 Giugno 2009

Esercizio 1.

La variabile aleatoria X può assumere i valori $-2, -1, 0, 1, 2$ ciascuno con probabilità $\frac{1}{5}$. Sia $Y = X^2$.

a) Calcolare $\mathbf{P}(X = h|Y = k)$ per i valori rilevanti di h e k.

b) Calcolare $\mathbb{E}(X|Y)$

c) Calcolare $\mathbf{C}ov(X, Y)$.

d) X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.

Esercizio 2.

Un quiz televisivo prevede due partecipanti (A, B), avversari fra loro.

Il presentatore propone sequenzialmente 4 domande.

Viene scelto a caso il giocatore cui viene rivolta la prima domanda. Se questi risponde, gli viene presentata la seconda domanda, e così via finchè non sbaglia una risposta.

Soltanto quando questi sbaglia, il gioco passa all'altro giocatore, cui viene rivolta la stessa domanda.

Se nessuno dei due risponde a una domanda si passa alla successiva; ed il gioco continua così di seguito fino all'esaurimento delle 4 domande.

Ciascun giocatore ha una probabilità del 50% di dare risposta esatta a qualunque domanda gli venga rivolta.

Sia X_A il numero delle risposte esatte date da A, X_B il numero delle risposte esatte date da B e X_C il numero delle domande cui non è stata data risposta esatta (nè da A, nè da B).

a) Trovare la probabilità che una specifica domanda non riceva risposta esatta

b) Qual è la distribuzione di probabilità di X_C?

Supponiamo che questo tipo di quiz venga ripetuto per 100 serate consecutive ed indichiamo con Y_{100} il numero delle serate in cui si osserva il risultato $\{X_C = 2\}$.

c) Calcolare il valore atteso e la varianza di $\frac{Y_{100}}{100}$.

d) Usare la disuguaglianza di Chebyshev per maggiorare $\mathbf{P}(|Y_{100} - \frac{675}{32}| > 12)$.

e) In una singola serata, qual è la probabilità dell'evento $\{X_A = 1, X_B = 1\}$?

Esercizio 3.

Tre compagnie telefoniche A, B e C sono in concorrenza. Ogni anno A perde il 5% dei suoi clienti a favore di B e il 20% a favore di C; B perde il 15% a favore di A e il 20% a favore di C; C perde il 5% a favore di A e il 10% a favore di B.

Fissiamo un utente a caso e indichiamo con X_n la compagnia di cui l'utente è cliente nell'anno n. Consideriamo quindi la catena di Markov $\{X_n\}_{n=0,1,\dots}$

a) Scrivere la matrice di transizione della catena.

b) Supponendo che al tempo zero la compagnia A fosse in una situazione di monopolio (cioé $\mathbf{P}(X_0 = A) = 1$), calcolare $\mathbf{P}(X_1 = A | X_2 = A)$.

c) Trovare la distribuzione invariante π della catena e dire quali saranno le quote di mercato delle tre compagnie dopo molti anni dall'inizio del processo.

Esercizio 4.

X e Y sono due variabili aleatorie sullo stesso spazio di probabilità e a valori in $\mathbb{N}$. Sappiamo che $X(\omega) \le Y(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$. Dimostrare che $\mathbb{E}(X) \le \mathbb{E}(Y)$.