

Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Prova scritta del 20-1-2010

Esercizio 1.

Tiriamo cinque dadi a sei facce. Sia X il numero di “6” ottenuti.

- a) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Ora raccogliamo i dadi che non hanno dato “6” e li lanciamo di nuovo. Poi ripetiamo la procedura una terza volta. Sia Y il numero di “6” sul tavolo dopo i tre lanci.

- b) Calcolare la distribuzione di Y e $\mathbb{E}(Y)$.
c) Calcolare $\mathbb{E}(Y|X)$ e $\text{Cov}(X, Y)$.

Esercizio 2.

Una commissione parlamentare (costituita da sei membri della maggioranza e quattro dell'opposizione) deve essere affiancata da una sotto-commissione di controllo, costituita da 3 membri. La formazione di questa sottocommissione avviene secondo le seguenti modalità: per tre volte di seguito viene scelto a caso un membro dalla commissione “madre”; ma dopo ciascuna estrazione quest'ultima commissione viene reintegrata con un membro del Parlamento proveniente dalla parte opposta rispetto a quella dell'ultimo estratto.

- a) Calcolare la probabilità che il primo membro estratto sia stato dell'opposizione, sapendo che il secondo proviene dalla maggioranza.
b) Calcolare la probabilità dell'evento

$$E \equiv \{i \text{ 3 membri estratti sono tutti dell'opposizione}\}.$$

- c) Si indichi con X il numero di parti distinte rappresentate nella sotto-commissione. Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Esercizio 3.

Marco acquista dei cioccolatini. Il numero totale X di cioccolatini acquistati ha distribuzione di Poisson di parametro λ . Ogni cioccolatino è fondente con probabilità $3/4$, altrimenti è al latte, ognuno indipendentemente dagli altri. Sia Y il numero di cioccolatini fondenti.

- a) Calcolare $\mathbf{P}(Y = 6 \mid X = 10)$.
- b) Trovare la distribuzione marginale di Y a partire dalla distribuzione condizionata di Y dato X .
- c) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 4.

Lucia ha due sedi di lavoro. Quando esce di casa (A) si reca in una delle due sedi di lavoro con uguale probabilità. Se si trova in uno dei due uffici (B o C) va a casa con probabilità $2/3$ e nell'altro ufficio con probabilità $1/3$.

- a) Scrivere la matrice di transizione della catena X_t che rappresenta la posizione di Lucia.

Supponiamo che Lucia si trovi a casa al tempo $t = 0$.

- b) Per ciascuno dei tre luoghi calcolare la probabilità che Lucia vi si trovi al tempo $t = 2$.
- c) Calcolare la probabilità che si trovi in C al tempo $t = 3$.
- d) Trovare la distribuzione invariante π della catena.