Calcolo delle Probabilità 1
M.Isopi M. Piccioni
Compito del 18-6-2007

Esercizio 1.

Un certo tipo di lamette da barba "usa e getta" viene prodotto da due stabilimenti a e b. Se una lametta viene dallo stabilimento a, vi è una probabilità di $\frac{3}{5}$ che permetta una rasatura regolare, mentre le lamette dello stabilimento b sono sempre funzionanti per la prima rasatura. Dopo che la prima rasatura è stata effettuata, una seconda rasatura è possibile per le lamette dello stabilimento a con probabilità uguale a $\frac{2}{5}$, mentre nel caso dello stabilimento b la probabilità è di $\frac{3}{5}$.

a) Avendo effettuato con successo la prima rasatura, qual'è la probabilità che la lametta venga dallo stabilimento a?

b) Avendo effettuato con successo la prima rasatura, qual'è la probabilità che sia possibile una seconda rasatura?

Esercizio 2.

4 coppie di amici (ciascuna composta da marito e moglie) organizzano una lotteria, distribuendo tra di loro a caso 4 premi. Ciascuno dei premi è sorteggiato tra gli 8 componenti delle coppie, indipendentemente per ciascun premio.

a) Determinare la probabilità che nessuno riceva più di un premio.

b) Determinare la probabilità che ciascuna coppia riceva un premio.

Esercizio 3.

Un gioco viene effettuato nel modo seguente. Si lanciano due dadi a 4 facce e si vince la differenza X tra i due punteggi, presa con il segno positivo.

a) Calcolare il valore atteso $\mathbf{E}(X)$ e la varianza $\mathbf{V}ar(X)$.

b) Se il gioco viene ripetuto indipendentemente 16 volte, e X_j sono le vincite nelle 16 prove, $j = 1, ..., 16$, utilizzare l'approssimazione gaussiana per valutare

$$\mathbf{P}\{20 \leq \sum_{j=1}^{16} X_j \leq 26\}.$$

Esercizio 4.

Si consideri una catena di Markov con spazio degli stati $\{A, B, C\}$ e con matrice di probabilità di transizione data da

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

a) Determinare π, la legge stazionaria (invariante) della catena.

b) Calcolare $\mathbf{P}\{X_4 = C | X_2 = A\}$ e, assumendo che la distribuzione di X_0 sia π, calcolare $\mathbf{P}\{X_2 = A | X_4 = C\}$.