Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Prova scritta del 14-7-2009

Esercizio 1.

Un'urna contiene cinque palle rosse e quattro bianche. Estraiamo una palla a caso e poi la reinseriamo insieme a un'altra dello stesso colore. Successivamente effettuiamo un'altra estrazione.

a) Calcolare la probabilità che la prima palla sia stata bianca, sapendo che la seconda è stata rossa.

b) Effettuiamo k estrazioni con le stesse regole. Calcolare la probabilità dell'evento $\{$*le k palle estratte sono tutte rosse*$\}$.

c) Si Indichi con X il numero di colori distinti che abbiamo osservato nelle prime due estrazioni. Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Esercizio 2.

Arianna e Beatrice trascorrono il fine-settimana in campeggio. Il numero totale X di punture di zanzara ha distribuzione di Poisson di parametro λ. Ogni puntura appartiene ad Arianna o Beatrice con la stessa probabilità, ognuna indipendentemente dalle altre. Sia Y il numero di punture ricevuto da Arianna.

a) Calcolare $\mathbf{P}(Y = 4 \,|\, X = 10)$.

b) Trovare la distribuzione marginale di Y a partire dalla distribuzione condizionata di Y dato X.

c) Calcolare $\mathbf{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

Esercizio 3.

Un dado a 12 facce viene lanciato dieci volte. Sia X il punteggio massimo ottenuto nei dieci lanci.

a) Calcolare $\mathbf{P}(X \leq 3)$

b) Calcolare $\mathbf{P}(X = 3)$

c) Sia Y il punteggio massimo ottenuto nei primi nove lanci.
Calcolare $\mathbf{P}(X = k \,|\, Y = 6)$.

Sia A l'evento $\{$*tutti i dieci lanci danno lo stesso risultato*$\}$.

d) Dire se gli eventi A e $\{X \leq 3\}$ sono positivamente dipendenti, negativamente indipendenti o indipendenti.

e) [**Facoltativo**] Dire, al variare di k, se gli eventi A e $\{X \leq k\}$ sono positivamente dipendenti, negativamente indipendenti o indipendenti.

Esercizio 4.

Una compagnia di assicurazioni classifica i propri clienti in tre categorie: *a rischio* (A), *normali* (B) e *extra* (C). Nessuno passa da A a C o da C ad A in un solo anno. In un anno 40% dei clienti A diventano B e 30% dei B diventano C, mentre 10% diventano A; infine 20% dei C diventano B. Ogni cliente inizia come *normale* (B). Sia X_n lo stato di un fissato cliente nel suo ennesinmo anno di polizza e consideriamo la catena di Markov $\{X_n\}$.

a) Scrivere la matrice di transizione della catena.

b) Calcolare la distribuzione dei clienti dopo due anni.

c) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = B \,|\, X_3 = B)$.

d) Trovare la distribuzione invariante π della catena.