

Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Prova scritta del 8-9-2009

Esercizio 1.

Uno studente possiede quattro libri di algebra, sette di analisi e cinque di geometria. I libri vengono disposti a caso su uno scaffale. Trovare la probabilità dei seguenti eventi:

- a) Il primo libro a sinistra è di geometria e il secondo di algebra.
- b) I libri di ogni materia sono contigui.
- c) I libri di ogni materia sono in ordine alfabetico, ma non necessariamente contigui.
- d) I libri di ogni materia sono in ordine alfabetico e contigui.

Esercizio 2.

Ogni settimana Luigi riceve un numero X di telefonate da parte di venditori di prodotti o servizi. X è una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 2$.

- a) Qual è la probabilità che Luigi riceva almeno due telefonate?
- b) Qual è la probabilità che Luigi abbia ricevuto almeno due telefonate, sapendo che ne ha ricevuta almeno una?
- c) Trovare il valore atteso di chiamate ricevute da Luigi, sapendo che ne ha ricevuta almeno una.

Con probabilità $p = 1/3$ il venditore chiederà di parlare con la moglie di Luigi.

- d) In una data settimana, con quale probabilità Luigi non riceverà una richiesta di questo tipo?

Esercizio 3.

Lanciamo due volte un dado a sei facce e chiamiamo X la somma dei punteggi e Y il più alto. Sia poi A l'evento "il primo punteggio è maggiore del secondo".

- a) Calcolare la densità discreta di Y e il suo valore atteso $\mathbb{E}(Y)$.
- b) X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
- c) Dire, motivando la risposta, se gli eventi A e $\{X = 5\}$ sono indipendenti.

Esercizio 4.

In una certa città padana non ci sono mai due giorni di sole di seguito. Un determinato giorno può essere piovoso (1), nuvoloso (2) o di sole (3). Se un giorno è di sole, quello successivo sarà con uguale probabilità nuvoloso o piovoso. Se un giorno è nuvoloso o piovoso, il successivo sarà dello stesso tipo con probabilità $1/2$; oppure di uno degli altri due tipi con probabilità $1/4$.

Sia X_n il tipo dell' n -esimo giorno e consideriamo la catena di Markov $\{X_n\}$ con condizione iniziale $X_0 = 3$.

- a) Scrivere la matrice di transizione della catena.
- b) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = i)$ per $i = 1, 2, 3$.
- c) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_3 = 1)$.
- d) Trovare la distribuzione invariante della catena.