ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL DEL 9/10/2013

Esercizio 1 Stabilire se la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^4)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

Esercizio 2 Stabilire se la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua.

Esercizio 3 Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ la norma euclidea.
(a) Provare che f non ammette derivate parziali nell'origine.
(b) Provare che f è differenziabile in ogni punto $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Esercizio 4 In quali punti del piano è differenziabile la funzione $f(x,y) = |xy|$?

Esercizio 5 Sia

$$f(x,y) = x^{1/3}y^{2/3}.$$

(i) Determinare in quali punti del piano la f è differenziabile.
(ii) Calcolare le derivate direzionali nell'origine.

Esercizio 6 Per ognuna delle funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+2\,y^2}, \qquad g(x,y) = \sqrt{3\,x^2+y^2+1},$$
$$h(x,y) = \sqrt{x^2+2\,x\,y+y^2+2}, \qquad l(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$$

calcolare le derivate parziali nei rispettivi insiemi di definizione e determinare dove la funzione è differenziabile.

Esercizio 7 Data la funzione $f(x,y) = e^{2x^2+y^2+x-3y}$, scrivere l'equazione del piano tangente a $z = f(x,y)$ nel punto $(0,0,1)$. Dimostrare che il grafico della funzione f giace sempre sopra il grafico di tale piano tangente.

Esercizio 8 Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiarne
(a) la continuità,
(b) l'esistenza delle derivate parziali,
(c) la differenziabilità.
(d) Scrivere, se esistono, i piani tangenti a $z = f(x,y)$ in $(0,0,0)$ e in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 1/\pi)$.

Esercizio 9 Siano

$$f(x,y) = \arctan(e^{x^2 y}\cos(x+y)), \quad \phi(u,v) = \log(1+uv), \quad \psi(u,v) = u^2+v^2,$$

$$F(u,v) = f(\phi(u,v), \psi(u,v)).$$

Calcolare $\nabla F(0,0)$.