ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL DEL 9/10/2013

Esercizio 1 Stabilire se la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^4)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

Risposta La funzione è continua: infatti $\log(1+y) \leq y$ e quindi:

$$0 \leq \frac{\log(1+x^4)}{x^2+y^2} \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} \leq x^2.$$

Esercizio 2 Stabilire se la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua.

Risposta La f è banalmente continua in ogni punto diverso dall'origine. Per $(x,y) \to (0,0)$, però, sia numeratore che denominatore tendono a zero, e con le usuali maggiorazioni non riusciamo a provare che $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Se ci mettiamo a fare tentativi con rette, parabole, cubiche, quartiche, e tutte le curve del tipo $y = ax^n$ o $x = by^n$, $n = 1,2,3,\ldots$, ci viene sempre $f(x, ax^n) \to 0$ per $x \to 0$ e $f(by^n, y) \to 0$ per $y \to 0$, sicché si potrebbe congetturare che f sia continua in $(0,0)$. Ma nella frazione i termini che compaiono sono x^3, y^2 e i loro quadrati, per cui proviamo a considerare la curva $y^2 = x^3$, ovvero $x = y^{2/3}$ oppure $y = x^{3/2}$: otteniamo per esempio

$$f(y^{2/3}, y) = \frac{(y^{2/3})^3y^2}{(y^{2/3})^6 + (y)^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \quad \forall y \neq 0,$$

e quindi $f(y^{2/3}, y)$ non tende a 0 per $y \to 0$.Abbiamo trovato una curva su cui la funzione non tende al suo valore $f(0,0) = 0$, e di conseguenza f non è continua in $(0,0)$.

Esercizio 3 Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ la norma euclidea.
(a) Provare che f non ammette derivate parziali nell'origine.
(b) Provare che f è differenziabile in ogni punto $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Risposta (a) Per definizione, esiste la derivata parziale di f rispetto a x_k nel punto 0 se la funzione

$$\phi(t) = f(0,\ldots,0,t,0,\ldots,0), \quad t \in \mathbb{R},$$

è derivabile in $t = 0$. Ora, $\phi(t) = \sqrt{t^2} = |t|$, quindi ϕ non è derivabile in $t = 0$, perché il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale $\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t-0}$ sono diversi. Dunque in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ non esiste la derivata parziale di f rispetto a x_k per $k = 1,\ldots,n$.

(b) Sia $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. La funzione "radice quadrata di un numero non negativo", $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \sqrt{s}$, è derivabile in ogni punto $s > 0$, con derivata $1/(2\sqrt{s})$. Quindi la funzione (di una variabile reale)

$$\phi(t) = f(t, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{t^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

è derivabile nei punti $t \in \mathbb{R}$ tali che $t^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$. La sua derivata è

$$\phi'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \,,$$

e la derivata parziale di f rispetto a x_1 nel punto in $\mathbf{x}$ è, per definizione, $\phi'(t)$ calcolata per $t = x_1$, cioè

$$\partial_{x_1} f(x) = \phi'(x_1) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|} \,.$$

Notiamo che questa frazione ha senso perché in $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. In modo analogo si ottiene l'esistenza della derivata parziale rispetto a x_k per ogni $k = 1, \dots, n$, con

$$\partial_{x_k} f(x) = \frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|} \,.$$

Ogni derivata parziale $\partial_{x_k} f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, e quindi f è differenziabile in ogni punto $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ per il teorema del differenziale totale.

Esercizio 4 In quali punti del piano è differenziabile la funzione $f(x, y) = |xy|$?

Risposta In tutto S = piano privato degli assi coordinati è facile vedere che $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ esistono e valgono rispettivamente $(x/|x|)|y|$ e $|x|(y/|y|)$. Poiché in S queste sono funzioni continue, il Teorema del differenziale totale garantisce la differenziabilità in S.

Nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ la funzione $y \mapsto |x_0||y|$ non è derivabile, per cui non esiste $f_y(x_0, 0)$, cosí come nei punti $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ non è derivabile la funzione $x \mapsto |x||y_0|$, per cui non esiste $f_x(0, y_0)$. Dunque f non è differenziabile nei punti degli assi coordinati diversi dall'origine.

Nell'origine non possiamo pensare di provare ad applicare il Teorema del differenziale totale, perché in ogni intorno esistono dei punti in cui manca l'una o l'altra delle derivate. Proviamo con la verifica diretta. Sia $f_x(0, 0)$ che $f_y(0, 0)$ esistono e sono nulle: poiché

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0 \quad \text{per } (x, y) \to (0, 0)$$

la f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 5 Sia

$$f(x, y) = x^{1/3} y^{2/3}.$$

(i) Determinare in quali punti del piano la f è differenziabile.
(ii) Calcolare le derivate direzionali nell'origine.

Risposta Le derivate direzionali esistono nel piano privato degli assi coordinati perché lì f è C^1, e quindi si applica la condizione *sufficiente* — non *necessaria*! — fornita dal Teorema del differenziale totale.

Nei punti degli assi coordinati non possiamo calcolare le eventuali derivate parziali con le usuali regole di calcolo perché in essi si annulla l'argomento di una radice che dovrebbe andare a denominatore, e quindi dobbiamo controllare direttamente i limiti dei rapporti incrementali

$$0 \neq h \mapsto \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h}, \quad 0 \neq h \mapsto \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h}.$$

Vediamo così che nei punti $(x, 0)$ con $x \neq 0$ non esiste la derivata direzionale f_y, mentre nei punti $(0, y)$ con $y \neq 0$ non esiste la derivata direzionale f_x; nell'origine invece f non solo ammette le derivate parziali rispetto a x e rispetto ad y, entrambe nulle, ma inoltre verifica

$$\frac{f(tu_1, tu_2)}{t} = \frac{tu_1^{1/3} u_2^{2/3}}{t} = u_1^{1/3} u_2^{2/3}$$

per ogni scelta del versore $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Ne segue che f è dotata di ogni derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^{1/3} u_2^{2/3},$$

ma non è differenziabile: verifica diretta, oppure formula del gradiente

$$\nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u} = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) \quad \text{per } u_1 u_2 \neq 0.$$

Esercizio 6 Per ognuna delle funzioni

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\,y^2}, \qquad g(x,y) = \sqrt{3\,x^2 + y^2 + 1},$$

$$h(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\,x\,y + y^2 + 2}, \qquad l(x,y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$$

calcolare le derivate parziali nei rispettivi insiemi di definizione e determinare dove la funzione è differenziabile.

Risposta Utilizzando calcoli standard si ha

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

per ogni $(x, y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Poiché tali derivate parziali risultano continue in D, la funzione f è differenziabile in tutto D per il teorema del differenziale totale. Nel punto $(0, 0)$ la funzione non può essere differenziabile in quanto in tale punto non esistono neppure le derivate parziali: ad esempio si osservi che $f(x, 0)$ è uguale a $\sqrt{x^2} = |x|$, che non è derivabile in 0.

Nel secondo caso abbiamo

$$g_x(x,y) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + y^2 + 1}}, \quad g_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{3x^2 + y^2 + 1}}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi possiamo concludere che la funzione g è differenziabile dappertutto.

Nel caso della terza funzione otteniamo

$$h_x(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2 + 2}}, \quad h_y(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{(x+y)^2 + 2}} :$$

come nel caso precedente osserviamo che le derivate parziali sono definite e continue in $\mathbb{R}^2$, per cui la funzione g risulta differenziabile in ogni punto.

Infine per quanto riguarda l'ultima funzione otteniamo le derivate

$$l_x(x,y) = -\frac{x\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad l_y(x,y) = -\frac{y\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

definite e continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per cui la funzione è differenziabile in tale insieme.

Resta da analizzare il punto $(0,0)$. In esso la funzione risulta continua. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(|x|)-1}{x} = 0,$$

per cui esiste $l_x(0,0) = 0$. Con un calcolo analogo si ottiene $l_y(0,0) = 0$. Quindi affinché l sia differenziabile nell'origine dobbiamo dimostrare che esiste ed è uguale a zero il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2})-1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ma ciò è assicurato dal limite di una variabile $\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} = 0$. Infatti, posta $s(t) := \frac{\cos(t)-1}{t}$, che si estende per continuità ponendola uguale a zero nell'origine, il limite in due variabili di sopra coincide con

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} s(\sqrt{x^2+y^2})$$

che vale zero per noti risultati sulla composizione di funzioni continue.

Questa osservazione può essere utilizzata ogni volta in cui risulta utile sfruttare limiti noti di funzioni di una variabile. Esempi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3x^2+y^6)}{3x^2+y^6} = 1, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^4+y^2}-1}{x^4+y^2} = 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+3y^2)}{x^2+3y^2}\frac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1\cdot 0 = 0.$$

Esercizio 7 Data la funzione $f(x,y) = e^{2x^2+y^2+x-3y}$, scrivere l'equazione del piano tangente a $z = f(x,y)$ nel punto $(0,0,1)$. Dimostrare che il grafico della funzione f giace sempre sopra il grafico di tale piano tangente.

Risposta Osserviamo preliminarmente che la funzione f ammette derivate parziali di ogni grado, tutte continue. Quindi la funzione f è differenziabile, e di conseguenza dotata di piano tangente in ogni punto del piano. In particolare, nell'origine il piano tangente ha equazione

$$z = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y,$$

ovvero, poiché $f(0,0) = 1$, $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = -3$,

$$z = 1 + x - 3y,$$

come si poteva anche osservare subito usando lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione e^t e sostituendo al posto di t la funzione $2x^2+y^2+x-3y$.

Per dimostrare la seconda parte conviene utilizzare la disuguaglianza

$$e^t \geq 1 + t,$$

valida per ogni $t \in \mathbb{R}$, che si ottiene ad esempio dallo sviluppo di Taylor al primo ordine di e^t con resto in forma di Lagrange. Abbiamo quindi

$$f(x, y) = e^{2x^2+y^2+x-3y} \geq 1 + 2x^2 + y^2 + x - 3y \geq 1 + x - 3y$$

da cui la tesi.

Esercizio 8 Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiarne
(a) la continuità,
(b) l'esistenza delle derivate parziali,
(c) la differenziabilità.
(d) Scrivere, se esistono, i piani tangenti a $z = f(x, y)$ in $(0, 0, 0)$ e in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 1/\pi)$.

Risposta (a) La funzione f è banalmente continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Resta da studiare la sua continuità nel punto $(0, 0)$. A tal fine ricordiamo che

$$|1 - \cos t| \leq \frac{1}{2} t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo dunque

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{|1 - \cos(xy)|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\frac{1}{2} (xy)^2}{x^2 + y^2}$$

e l'ultimo termine tende a 0 per $(x, y) \to (0, 0)$, come si vede o maggiorandolo col prodotto di $y^2/2$ per $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ o passando alle coodinate polari. In conclusione, f è continua anche in $(0, 0)$.

(b) Calcoliamo la derivata parziale rispetto a x della f in un punto $(x, y) \neq (0, 0)$, con le usuali regole di derivazione di Analisi 1 (qui x è la variabile, mentre y ha il ruolo di una costante):

$$\partial_x f(x, y) = \frac{y \sin(xy)(x^2 + y^2) - (1 - \cos(xy))\, 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y \sin(xy)}{x^2 + y^2} - \frac{(1 - \cos(xy))\, 2x}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

In modo simile si calcola

$$\partial_y f(x, y) = \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} - \frac{(1 - \cos(xy))\, 2y}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

D'altra parte, in $(0, 0)$ esistono le derivate parziali, entrambe nulle (la funzione è identicamente nulla sugli assi coordinati). In conclusione, le derivate parziali di f esistono in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

(c) Essendo somme, prodotti e composizioni di funzioni continue, le derivate parziali di f sono funzioni continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, perciò, dal teorema del differenziale, f è differenziabile in tutti i punti $(x, y) \neq (0, 0)$. Resta da studiare la differenziabilità nell'origine.

Studiamo la continuità delle derivate parziali: se mostriamo che sono continue nell'origine, il teorema del differenziale implicherà la differenziabilità di f nell'origine. Abbiamo provato (punto (b)) che

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin(xy)}{x^2+y^2} - \dfrac{(1-\cos(xy))\,2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Per la disuguaglianza triangolare,

$$|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0,0)| \le \frac{|y||\sin(xy)|}{x^2+y^2} + \frac{|1-\cos(xy)|\,2|x|}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Siccome

$$|\sin t| \le |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

otteniamo

$$\frac{|y||\sin(xy)|}{x^2+y^2} \le \frac{|y||x||y|}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}|x| \le |x|$$

per il primo termine, mentre

$$\frac{|1-\cos(xy)|\,2|x|}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{x^2y^2|x|}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}|x| \le |x|$$

per il secondo. Quindi

$$|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0,0)| \le \frac{|y||\sin(xy)|}{x^2+y^2} + \frac{|1-\cos(xy)|\,2|x|}{(x^2+y^2)^2} \to 0$$

per cui $\partial_x f$ è continua in $(0,0)$. Similmente si prova che anche $\partial_y f(x,y) \to \partial_y f(0,0) = 0$ per $(x,y) \to (0,0)$. Per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile in $(0,0)$.

In conclusione, f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 9 Siano

$$f(x,y) = \arctan(e^{x^2y}\cos(x+y)), \quad \phi(u,v) = \log(1+uv), \quad \psi(u,v) = u^2+v^2,$$

$$F(u,v) = f(\phi(u,v), \psi(u,v)).$$

Calcolare $\nabla F(0,0)$.

Risposta La f è regolarissima in tutto il piano xy, la ϕ lo è per $uv > -1$ e la ψ in tutto il piano uv, per cui si può applicare la regola di derivazione delle funzioni composte al variare di u e v con $uv > -1$, quindi in particolare in un intorno dell'origine del piano uv. Dal momento che risulta

$$F_u(u,v) = f_x(\phi(u,v), \psi(u,v))\phi_u(u,v) + f_y(\phi(u,v), \psi(u,v))\psi_u(u,v),$$

$$F_v(u,v) = f_x(\phi(u,v), \psi(u,v))\phi_v(u,v) + f_y(\phi(u,v), \psi(u,v))\psi_v(u,v)$$

e $\nabla\phi(0,0) = \nabla\psi(0,0) = (0,0)$, si ha $\nabla F(0,0) = (0,0)$.