ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 18/10/2013

Esercizio 1 (a) Stabilire se la funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \log\left(2 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right),$$

si può estendere ad una funzione continua in $\mathbb{R}^3$.

(b) La stessa domanda per la funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{e^{x^2yz}-1}{x^4+y^4+z^4}.$$

Esercizio 2 Determinare eventuali punti critici delle seguenti funzioni

$$x^3 - 3xy + 6y, \qquad e^{-x^2-y^2+2x-2y},$$

$$2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4, \qquad xy^2 - x^2 - y^2, \qquad \log(1+x^2y) - x + 2y.$$

Esercizio 3 Scrivere i polinomio di Taylor di grado 2 nel punto (x_0, y_0) delle funzioni

$$f(x,y) = y\,\sin(x+y),\ \ (x_0,y_0) = (0,0)$$

$$g(x,y) = e^{x-y^2},\ \ (x_0,y_0) = (0,0)$$

$$h(x,y) = (x-y)^2\, e^{x^2+y^2},\ \ (x_0,y_0) = (0,1).$$

Esercizio 4 Dimostrare, senza eseguire derivazioni, che la funzione $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) - \cos(x-y)$ ammette minimo relativo nel punto $(0,0)$.

Esercizio 5 Determinare eventuali massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni

$$x^3 - 3xy + 6y, \qquad e^{-x^2-y^2+2x-2y}, \qquad 2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4, \quad xy^2 - x^2 - y^2.$$

Esercizio 6 (i) Cercare massimi e minimi locali di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

(ii) Calcolare (prima) $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e (poi) $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

Esercizio 7 Siano A un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $f \in C^2(A)$. Far vedere che, se in un $\mathbf{x}_0 \in A$ il gradiente di f si annulla e la sua matrice hessiana ha sulla diagonale principale due elementi di segno opposto, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di sella.

Esercizio 8 Cercare il massimo e il minimo assoluto di $f(x,y) = xy$ sul disco $x^2+y^2 \le 1$.

Esercizio 9 Massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)$ sul disco $x^2+y^2 \le 1$.