ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 18/10/2013

Esercizio 1 (a) Stabilire se la funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \log\left(2 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right),$$

si può estendere ad una funzione continua in $\mathbb{R}^3$.

(b) La stessa domanda per la funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{e^{x^2yz}-1}{x^4+y^4+z^4}.$$

Risposta (a) f è la composizione

$$f(x,y,z) = \log(g(x,y,z)), \quad g(x,y,z) = 2 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\,.$$

La funzione log è continua nel suo dominio $(0,\infty)$. La funzione g è ≥ 2, quindi $g(x,y,z)$ appartiene al dominio di log per ogni (x,y,z) nel dominio di g. Studiamo g:

$$|g(x,y,z)-2| = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

e quindi

$$|g(x,y,z)-2| \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0).$$

Di conseguenza

$$f(x,y,z) = \log(g(x,y,z)) \to \log 2 \quad \text{per } (x,y,z) \to 0:$$

la funzione

$$\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{per } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ \log 2 & \text{per } (x,y,z) \neq (0,0,0) \end{cases}$$

è continua, ed è l'estensione cercata.

Attenzione: si può naturalmente sfruttare la maggiorazione $|\log(1+t)| \leq |t|$ per $t > -1$, ma siccome in questo caso tutto quello che se ne ricava è che

$$\log\left(2 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) \leq 1 + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

possiamo dedurre solo che *se* esiste il limite di f per $(x,y,z) \to (0,0,0)$, questo limite dev'essere ≤ 1 (e infatti, come abbiamo visto, è $\log 2$).

(b) Supponiamo che l'estensione continua $\widetilde{f}$ esista e consideriamo la retta

$$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = (t,0,0),.$$

La composizione $\widetilde{f} \circ \phi$ dà

$$\widetilde{f}(\phi(t)) = \widetilde{f}(t,0,0) = f(t,0,0) = \frac{e^{t^2 00}-1}{t^4+0^4+0^4} = \frac{0}{t^4} = 0 \quad \forall t \neq 0,$$

da cui
$$\lim_{t\to 0} f(\phi(t)) = 0.$$
Ora consideriamo la retta
$$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(t) = (t,t,t).$$
La composizione $\widetilde{f} \circ \psi$ dà
$$\widetilde{f}(\psi(t)) = \widetilde{f}(t,t,t) = f(t,t,t) = \frac{e^{t^2tt}-1}{t^4+t^4+t^4} = \frac{e^{t^4}-1}{3t^4} \quad \forall t \neq 0,$$
da cui (usando il limite notevole per l'esponenziale)
$$\lim_{t\to 0} \widetilde{f}(\psi(t)) = \frac{1}{3}\,.$$
Ne segue che f non ammette nessuna estensione continua.

Esercizio 2 Determinare eventuali punti critici delle seguenti funzioni
$$x^3 - 3xy + 6y, \qquad e^{-x^2-y^2+2x-2y},$$
$$2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4, \qquad xy^2 - x^2 - y^2, \qquad \log(1+x^2y) - x + 2y.$$

Risposta Per ottenere i punti critici dobbiamo vedere in quali punti le due derivate parziali si annullano contemporaneamente, ovvero risolvere il sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0, \end{cases}$$
In generale la risoluzione di un tale sistema può essere complicata o addirittura proibitiva. Non però nel caso degli esempi di questo esercizio, in cui si devono fare dei conti piuttosto elementari. Riportiamo le soluzioni per le prime 4 funzioni:

$x^3 - 3xy + 6y$,	ha un unico punto critico: $(2,4)$
$e^{-x^2-y^2+2x-2y}$,	ha un unico punto critico: $(1,-1)$
$2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4$,	ha 9 punti critici: $(0,0), (0 \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$,
$xy^2 - x^2 - y^2$,	ha 3 punti critici: $(0,0), (1, \pm\sqrt{2})$.

Svolgiamo i dettagli solo per la funzione $f(x,y) := \log(1+x^2y) - x + 2y$. Come prima cosa osserviamo che la funzione è definita nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1+x^2y > 0\}$. Per determinare i punti critici risolviamo il sistema
$$\begin{cases} f_x(x,y) = -1 + \frac{2xy}{1+x^2y} = 0 \\ f_y(x,y) = 2 + \frac{x^2}{1+x^2y} = 0. \end{cases}$$
Dunque dobbiamo avere $1 + x^2y = 2xy$, ma anche $1 + x^2y = -\frac{x^2}{2}$, e questa seconda equazione non ammette soluzioni in D.

Esercizio 3 Scrivere i polinomio di Taylor di grado 2 nel punto (x_0, y_0) delle funzioni
$$f(x,y) = y\,\sin(x+y), \;\; (x_0,y_0) = (0,0)$$

$$g(x,y) = e^{x-y^2},\ \ (x_0,y_0) = (0,0)$$
$$h(x,y) = (x-y)^2\, e^{x^2+y^2},\ \ (x_0,y_0) = (0,1).$$

Risposta Data una funzione F il suo polinomio di Taylor di grado 2 centrato in (x_0, y_0) è dato dalla formula
$$T_2(x,y) = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}F_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + F_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}F_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$
e quindi tutte le funzioni dell'esercizio si possono studiare meccanicamente calcolando nel punto (x_0, y_0) tutte le derivate parziali fino all'ordine 2. D'altra parte è bene ricordare che il polinomio di Taylor è completamente caratterizzato dalla

$$F(x,y) = T_2(x,y) + o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2),$$

per cui un polinomio di ordine 2 che verifica tale proprietà deve coincidere necessariamente con il polinomio di Taylor centrato in (x_0, y_0). Questa osservazione ci permette qui di evitare troppi calcoli per f e g. Infatti possiamo usare gli sviluppi in una variabile

$$\sin(t) = t + o(t^2), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Nel primo caso otteniamo

$$\sin(x+y) = x + y + o((x+y)^2) = x + y + o(x^2+y^2)$$

da cui
$$f(x,y) = y\sin(x+y) = xy + y^2 + o(x^2+y^2)y = xy + y^2 + o(x^2+y^2)$$
per cui $xy + y^2$ deve coincidere con il polinomio di Taylor di grado 2 e centro l'origine; anzi da questo deduciamo pure, senza calcolarlo, che il gradiente della funzione è il vettore nullo.

Analogamente

$$g(x,y) = e^{x-y^2} = 1 + (x-y^2) + \frac{(x-y^2)^2}{2} + o((x-y^2)^2)$$
$$= 1 + x - y^2 + \frac{x^2}{2} - xy^2 + \frac{y^4}{2} + o((x^2+y^2)) = 1 + x - y^2 + \frac{x^2}{2} + o((x^2+y^2))$$
per cui il polinomio di Taylor di centro l'origine è $T_2(x,y) = 1 + x - y^2 + \frac{x^2}{2}$.

Nell'ultimo caso conviene sicuramente fare i conti delle derivate parziali: la strada dei primi 2 casi porterebbe inevitabilmente a commettere errori in quanto la funzione x^2+y^2 non è infinitesima quando (x,y) tende a $(0,1)$, e quindi non ha senso usare lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale vicino all'origine. Adesso abbiamo $f(0,1) = e$, inoltre

$$\nabla h(x,y) = (2(x-y)e^{x^2+y^2} + 2x(x-y)^2e^{x^2+y^2}, -2(x-y)e^{x^2+y^2} + 2y(x-y)^2e^{x^2+y^2})$$

quindi $h_x(0,1) = 2e$, $h_y(0,1) = 4e$. Eseguiamo pazientemente le derivazioni parziali di ordine 2. Otteniamo

$$h_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 4x(x-y)e^{x^2+y^2} + 2(x-y)^2e^{x^2+y^2} + 4x(x-y)e^{x^2+y^2} + 4x^2(x-y)^2e^{x^2+y^2};$$

$$h_{xy} = -2e^{x^2+y^2} + 4y(x-y)e^{x^2+y^2} - 4x(x-y)e^{x^2+y^2} + 4xy(x-y)^2e^{x^2+y^2},$$
$$h_{yy} = 2e^{x^2+y^2} - 4y(x-y)e^{x^2+y^2} + 2(x-y)^2e^{x^2+y^2} - 4y(x-y)e^{x^2+y^2} + 4y^2(x-y)^2e^{x^2+y^2}.$$

Quindi $h_{xx}(0,1) = 4e$, $f_{xy}(0,1) = -6e$, $h_{yy}(0,1) = 16e$, e infine

$$T_2(x,y) = e + 2ex + 4e(y-1) + 2ex^2 - 6ex(y-1) + 8e(y-1)^2.$$

Esercizio 4 Dimostrare, senza eseguire derivazioni, che la funzione $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) - \cos(x-y)$ ammette minimo relativo nel punto $(0,0)$.

Risposta La funzione $\sin(x^2+y^2)$ è ≥ 0 in un intorno di $(0,0)$ e vale zero in $(0,0)$, quindi zero è il valore minimo assunto dal primo addendo in un intorno di $(0,0)$. Per quanto riguarda il secondo addendo $-\cos(x-y)$ si nota che in $(0,0)$ vale -1 che e' il suo valore minimo assoluto.

Risposta Alternativa: Procediamo come nei primi 2 punti dell'esercizio precedente determinando, tramite i noti sviluppi di Taylor delle funzioni $\sin(t)$ e $\cos(t)$ nell' intorno di zero, lo sviluppo di Taylor del secondo ordine della funzione $f(x,y)$ di centro $(0,0)$. Abbiamo

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + o((x^2+y^2)^2) - 1 + \frac{(x-y)^2}{2} + o((x-y)^2),$$

e quindi

$$f(x,y) = -1 + x^2 + y^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy + o((x^2+y^2)).$$

Ne segue che il polinomio di Taylor della funzione f di ordine 2 e centro $(0,0)$ è dato da

$$T_2(x,y) = -1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - xy,$$

e da ciò deduciamo che $f(0,0) = -1$, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = 3$, $f_{yy}(0,0) = 3$, $f_{xy}(0,0) = -1$. Quindi l'origine è un punto critico; inoltre l'hessiana in quel punto ha determinante e traccia positivi, per cui $(0,0)$ è un punto di minimo relativo per la funzione.

Esercizio 5 Determinare eventuali massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni

$$x^3 - 3xy + 6y, \qquad e^{-x^2-y^2+2x-2y}, \qquad 2(x^2+y^2+1) - x^4 - y^4, \quad xy^2 - x^2 - y^2.$$

Risposta Si tratta delle medesime funzioni incontrate nell'esercizio 3. Abbiamo già determinato gli eventuali punti critici: si tratta ora di studiare per ognuno di essi il comportamento della matrice Hessiana.

La funzione $f(x,y) = x^3 - 3xy + 6y$ ammette un unico punto critico in $(2,4)$, e siccome $f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$, $f_y(x,y) = -3x + 6$, per cui $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = -3$, $f_{yy}(x,y) = 0$, il determinante della matrice Hessiana risulta negativo in ogni punto del piano; in particolare, il punto critico è punto di sella.

La funzione $f(x,y) = e^{-x^2-y^2+2x-2y}$ ammette un unico punto critico in $(1,-1)$. Poiché la funzione esponenziale è monotona crescente, per determinare max e min relativi ci basta studiare max e min relativi della funzione che si trova ad esponente. Studiamo quindi la funzione $g(x,y) =$

$-x^2 - y^2 + 2x - 2y$: abbiamo $g_x(x,y) = -2x + 2$, $g_y(x,y) = 2y + 2$, quindi $g_{xx}(x,y) = -2$, $g_{yy}(x,y) = 2$, $g_{xy}(x,y) = 0$. Anche in questo caso il determinante della matrice Hessiana è negativo in tutti i punti del piano, e quindi il punto critico è un punto di sella.

La funzione $f(x,y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - x^4 - y^4$ ammette 9 punti critici dati da $(0,0), (0 \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$, ma in realtà le simmetrie della funzione ci assicurano che è sufficiente studiare il comportamento della funzione nei punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Siccome $f_x(x,y) = 4x - 4x^3$, $f_y(x,y) = 4y - 4y^3$, quindi $f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 4 - 12y^2$, abbiamo innanzitutto che l'hessiana in ogni punto è una matrice diagonale.

Nel punto $(0,0)$ risulta $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 4$. Dunque l'origine è un punto di minimo relativo.

Nel punto $(1,0)$ si ha $f_{xx}(1,0) = -8$, $f_{yy}(1,0) = 4$, e quindi si tratta di un punto di sella.

Nel punto $(1,1)$ si ha $f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = -8$, e quindi si tratta di un punto di massimo relativo.

Per simmetria abbiamo che i punti $(0 \pm 1), (\pm 1, 0)$ sono punti di sella e i punti $(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ sono punti di massimo relativo.

La funzione $f(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2$ ammette i 3 punti critici $(0,0), (1, \pm\sqrt{2})$. Già senza fare ulteriori calcoli si può constatare che $(0,0)$ è un punto di massimo relativo (perché?). Coi calcoli: $f_x(x,y) = y^2 - 2x$, $f_y(x,y) = 2xy - 2y$, quindi $f_{xx}(x,y) = -2$, $f_{xy}(x,y) = 2y$, $f_{yy}(x,y) = 2x - 2$. Quindi nel punto $(0,0)$ si ha $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = -2$ e $f_{xy}(0,0) = 0$ e ciò mostra, come anticipato, che $(0,0)$ è un punto di massimo relativo.

Nei punti $(1, \pm\sqrt{2})$, si ha $f_{xx}(0,0) = -2$, $f_{yy}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = \pm 2\sqrt{2}$, per cui si tratta di punti di sella.

Esercizio 6 (i) Cercare massimi e minimi locali di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

(ii) Calcolare (prima) $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e (poi) $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

Risposta (i) I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$x^3 - x + y = 0, \quad y^3 - y + x = 0.$$

Sommando otteniamo innanzitutto che dev'essere $x^3 + y^3 = 0$, ovvero $x = -y$. Ne segue che basta risolvere $x^3 - 2x = 0$ per ottenere i tre punti critici $O = (0,0), P = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), Q = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Siccome

$$f_{xx} = 4(3x^2 - 1), \quad f_{yy} = 4(3y^2 - 1), \quad f_{xy} = 4,$$

in P e Q le hessiane coincidono, con determinante positivo, e inoltre $f_{xx} > 0$. Dunque P e Q sono punti di minimo locale, e in entrambi f vale -8. Nell'origine l'hessiana si annulla, dunque non fornisce indicazioni, ma basta studiare la funzione sulle bisettrici $y = x$ e $y = -x$ per constatare che O è un punto di sella.

(ii) Si mostra subito che $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \infty$: infatti muovendosi sulla retta $y = x$ si ottiene

$$\lim_{x \to \infty} f(x,x) = \lim_{x \to \infty} 2x^4 = \infty.$$

In effetti si può osservare di più: $f(x,y) \to \infty$ per $x^2 + y^2 \to \infty$. Infatti in coordinate polari abbiamo

$$f(\varrho \cos\vartheta, \varrho \sin\vartheta) = \varrho^4(\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta) - 2\varrho^2(\cos\vartheta - \sin\vartheta)^2 \geq \varrho^4 m - 4\varrho^2$$

(dove $m > 0$ è il minimo di $\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta$ su $[0, 2\pi]$). Questo ci serve perché, siccome il secondo membro della disuguaglianza qui sopra tende all'∞ per $\varrho \to \infty$, si ha $f(x, y) \geq 0$ (per esempio) se $x^2 + y^2$ è maggiore di un R^2 sufficientemente grande. Ma la f assume anche valori negativi, come si vede ad esempio prendendo i punti $(x, 0)$ con $0 < |x| < \sqrt{2}$. Tutti i valori negativi di f sono necessariamente assunti in punti dove $x^2 + y^2 \leq R^2$, per cui è in tale insieme che va cercato l'inf, che è anche il minimo grazie a Weierstrass: il minimo locale -8 di f nel compatto $x^2 + y^2 \leq R^2$ è anche l'$\inf_{\mathbb{R}^2} f$, cioè è minimo assoluto.

Esercizio 7 Siano A un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $f \in C^2(A)$. Far vedere che, se in un $\mathbf{x}_0 \in A$ il gradiente di f si annulla e la sua matrice hessiana ha sulla diagonale principale due elementi di segno opposto, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di sella.

Risposta Per ogni fissata direzione $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ scriviamo $\varphi_{[\mathbf{u}]}(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ e otteniamo

$$\varphi'_{[\mathbf{u}]}(0) = (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u}) = 0, \quad \varphi''_{[\mathbf{u}]}(0) = (\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{j,k=1}^{N} f_{x_j x_k}(\mathbf{x}_0) u_j u_k.$$

Se $f_{x_j x_j}(\mathbf{x}_0) > 0$ e $f_{x_k x_k}(\mathbf{x}_0) < 0$, indichiamo con $\mathbf{e}_j$ e $\mathbf{e}_k$ i versori rispettivamente dell'asse x_j e dell'asse x_k. Otteniamo

$$\varphi''_{[\mathbf{e_j}]}(0) = f_{x_j x_j}(\mathbf{x}_0) > 0, \quad \varphi''_{[\mathbf{e_k}]}(0) = f_{x_k x_k}(\mathbf{x}_0) < 0.$$

Dunque $t = 0$ è un punto di minimo per $g_{\mathbf{e}_j}$ e di massimo per $g_{\mathbf{e}_k}$: ne segue che $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo per la restrizione di f all'asse x_j e di massimo per la restrizione di f all'asse x_k.

Esercizio 8 Cercare il massimo e il minimo assoluto di $f(x, y) = xy$ sul disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Risposta L'unico punto critico interno al disco è l'origine, che è di sella: il grafico di f è il paraboloide iperbolico $y^2 - x^2 = 0$ ruotato di $\pi/4$! Sulla frontiera abbiamo un problema di estremi vincolati. Ci riconduciamo a un problema di estremi liberi in dimensione 1 passando in coordinate polari: $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Imponendo $g'(t) = 0$ troviamo la condizione $\cos^2 t = \sin^2 t$, e quindi o $\cos t = \sin t$ oppure $\cos t = -\sin t$: la f ha massimo in $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ e minimo in $(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$.

Esercizio 9 Massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 - y^2)$ sul disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Risposta Gli estremi vanno cercati: (i) tra i punti interni in cui f è derivabile con gradiente nullo, e questo è solo il caso dell'origine (si noti che le derivate in $x = y = 0$ esistono e sono continue), dove si vede subito che il grafico della funzione presenta una sella; (ii) tra i punti di frontiera, dove abbiamo un problema di estremi vincolati, ma ci riconduciamo a un problema di estremi liberi in dimensione 1 passando in coordinate polari, per cui f si scrive $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ e quindi assume massimo uguale a 1 e minimo uguale a -1. Questi valori sono anche il massimo e il minimo di f su tutto il disco, visto che $f(0, 0) = 0$.

Peraltro un'osservazione geometrica che semplifica i conti è la seguente: siccome ogni punto del disco cade, per un $r \in [0, 1]$, su una circonferenza $\sqrt{x^2 + y^2} = r^2$, dove il minimo $-r^3$ e il massimo r^3 della funzione sono assunti rispettivamente in $(0, r)$ e $(r, 0)$, otteniamo che sia il minimo assoluto

-1 e sia il massimo assoluto 1 della funzione sul disco sono assunti sulla circonferenza di frontiera, rispettivamente in $(0,1)$ e in $(1,0)$.

Esercizio 10 (i) Far vedere che in $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z > 0,\ x^2+y^2+z^2 = 5r^2\}$ $(r>0)$ esiste il massimo di $f(x,y,z) = \log x + \log y + 3\log z$ e calcolarlo.

(ii) Sia (x_0,y_0,z_0) il punto di massimo per f. Dalla disuguaglianza $f(x,y,z) \le f(x_0,y_0,z_0)$ per $(x,y,z) = (\alpha^{1/2},\beta^{1/2},\gamma^{1/2}) \in A$ dedurre che 3 numeri arbitrari $\alpha,\beta,\gamma > 0$ verificano

$$\alpha\beta\gamma^3 \le 27\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{5}\right)^5.$$

Risposta (i) Si tratta di un problema di estremi vincolati: A non è un aperto di $\mathbb{R}^3$, e nei suoi eventuali punti di massimo o minimo per f non c'è nessun motivo che ∇f si annulli né, tantomeno, che la sua hessiana abbia un qualunque carattere! Ci riconduciamo a un problema di minimo libero in dimensione 2 osservando che A è il grafico della funzione $z = \sqrt{5r^2 - x^2 - y^2}$ definita nell'insieme $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y > 0,\ x^2+y^2 < 5r^2\}$, aperto di $\mathbb{R}^2$, e che un eventuale massimo o minimo di f in A è rispettivamente un massimo o minimo della funzione

$$g(x,y) = f(x,y,\sqrt{5r^2-x^2-y^2}) = \log x + \log y + 3\log\sqrt{5r^2-x^2-y^2}, \quad (x,y) \in B.$$

Sommando membro a membro le equazioni $g_x = 0$, ovvero $5r^2 - 4x^2 - y^2 = 0$, e $g_y = 0$, ovvero $5r^2 - x^2 - 4y^2 = 0$, si ottiene innanzitutto la condizione $x^2+y^2 = 2r^2$, che poi, sostituita in una delle due equazioni, dà $x = y = r$. In (r,r) la g ha un massimo relativo (perché $g_{xx}(r,r) = g_{yy}(r,r) = -8r$, $g_{xy}(r,r) = 0$), che anzi è assoluto perché $g(x,y) \to -\infty$ quando $x^2+y^2 \to 5r^2$. Dunque f assume massimo $5\log r + 3\log\sqrt{3}$ in $(r,r,\sqrt{3}r)$.

Una strada alternativa consiste nell'applicare i moltiplicatori de Lagrange alla funzione

$$h(x,y,z) = \log(x/r) + \log(y/r) + 3\log(z/r) = f(x,y,z) - 5\log r$$

vincolata ad A. A tal fine introduciamo le nuove variabili $X = x/r$, $Y = y/r$, $Z = z/r$ e studiamo $\log(X) + \log(Y) + 3\log(Z)$ su $X^2+Y^2+Z^2 = 5$ (poi verificheremo la condizione di positività sulle coordinate). Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, cercando i punti critici liberi della funzione $\log(X) + \log(Y) + 3\log(Z)) - \lambda(X^2+Y^2+Z^2-5)$.

Il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{X} + 2\lambda X = 0 \\ \frac{1}{Y} + 2\lambda Y = 0 \\ \frac{3}{Z} + 2\lambda Z = 0 \\ X^2+Y^2+Z^2 = 5 \end{cases}$$

ha come unica soluzione con tutte le componenti positive $X = Y = Z/\sqrt{3}$. Sostituendo nel vincolo otteniamo $X = Y = 1$, e $Z = \sqrt{3}$. Il valore massimo è quindi $5\log(r) + 3\log(\sqrt{3})$ (la funzione ha estremo inferiore $-\infty$, e ciò garantisce che si tratta di un massimo).

(ii) Passando agli esponenziali nella disuguaglianza

$$\log x + \log y + 3\log z \le 5\log r + 3\log\sqrt{3}$$

si ottiene

$$xyz^3 \leq 3\sqrt{3}\left(\frac{r^2}{5}\right)^{5/2}$$

e si conclude elevando al quadrato.

Esercizio 11 Trovare i valori di (x, y, z) per i quali la funzione $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ assume valore minimo sul parallelepipedo rettangolo di lati lunghi x, y, z e volume fissato $= V > 0$.

Risposta Si tratta di un problema di minimo vincolato in dimensione 3, il vincolo essendo il sottoinsieme (non aperto!) di $\mathbb{R}^3$ costituito dai punti (x, y, z) con $xyz = V$ (e quindi $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Ci riconduciamo a un problema di minimo libero in dimensione 2 ponendo $z = V/(xy)$ e

$$g(x, y) = f\left(x, y, \frac{V}{xy}\right) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} = \frac{x^2y^2 + 2Vx + 2Vy}{xy}.$$

Cerchiamo i punti critici di g in $A =$ primo quadrante aperto:

$$g_x(x, y) = \frac{(x^2y - 2V)y^2}{(xy)^2} = y - \frac{2V}{x^2} = 0, \quad g_y(x, y) = \frac{(x^2y - 2V)x^2}{(xy)^2} = x - \frac{2V}{y^2} = 0.$$

Le soluzioni si ottengono per

$$x^2y = 2V, \quad xy^2 = 2V,$$

ovvero $x = y = (2V)^{1/3}$. Siccome $g_{xx}(x, y) = 4Vx^{-3}$, $g_{yy}(x, y) = 4Vy^{-3}$, $g_{xy}(x, y) = 1$, l'hessiana di g nell'unico punto critico è definita positiva, e quindi f è minima per $x = y = 2z = (2V)^{1/3}$.