ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL DEL 25/10/2013

Esercizio 1 Sia
$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1.$$

(i) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutta una semiretta $]-\alpha, \infty[$ per un $\alpha > 0$ una funzione $y = f(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, f(x)) = 0$;

(ii) Determinare il polinomio di Taylor $P(x)$ di secondo ordine e punto iniziale $x = 0$ relativo a $f(x)$ e calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \ .$$

Esercizio 2 Sia
$$F(x,y) = y^3 + (x^2+1)y - 3x^2.$$

(i) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutto $\mathbb{R}$ una funzione $y = g(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, g(x)) = 0$.

(ii) Calcolare le derivate $g'(1)$ e $g''(1)$.

Esercizio 3 Dato il sistema
$$\begin{cases} y^2 + x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

(i) dimostrare che in un intorno del punto $(0,0,1)$ esso definisce implicitamente due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ tali che $(x, \alpha(x), \beta(x))$ siano soluzioni del sistema;

(ii) calcolare $\alpha'(0), \beta'(0)$.

Esercizio 4 Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = e^{\tan(x+y)} - x - 3y - 1 = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0,0)$ una funzione $y = f(x)$ tale che $F(x, f(x)) = 0$. Dire se in 0 la funzione f ammette max o min relativo.

Esercizio 5 Assegnata la funzione
$$F(x,y,z) = \sin(xy)\cos z + 3e^{x+y}z - 1,$$
verificare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ soddisfa nel punto $(0,0,1/3)$ le condizioni del teorema di Dini e determinare l'equazione del piano tangente alla superficie definita dall'equazione $F(x,y,z) = 0$ in $(0,0,1/3)$.

Esercizio 6 Dimostrare che in un opportuno intorno di $(x,y) = (0,0)$ esiste una funzione f di classe C^1 che si annulla in $(0,0)$ e verifica l'equazione $x + y + f(x,y) = \sin[xyf(x,y)]$.

Esercizio 7 Determinare max e min assoluto della funzione $G(x,y) = x - y$ sui punti del piano soggetti al vincolo $F(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

Esercizio 8 Discutere la natura dei punti critici interni e trovare massimi e minimi vincolati della seguente funzione:
$$f(x,y) = x^6 y^{8/3} \quad \text{su} \quad x^4 + y^4 \le 13\,.$$

Esercizio 9 Calcolare il max e il min assoluti di $x^3 + y^3$ nel dominio
$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \le 1\}.$$