ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL DEL 25/10/2013

Esercizio 1 Sia
$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1.$$

(i) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutta una semiretta $-]\alpha, \infty[$ per un $\alpha > 0$ una funzione $y = f(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, f(x)) = 0$;

(ii) Determinare il polinomio di Taylor $P(x)$ di secondo ordine e punto iniziale $x = 0$ relativo a $f(x)$ e calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} .$$

Risposta (i) Siccome $F(0,0) = 0, \quad F_y(0,0) = -1 \neq 0$, l'esistenza della funzione implicita $y = f(x)$ innanzitutto in un intorno $]-\alpha, \alpha[$ di $x = 0$ segue dal Teorema di Dini, con la regolarità C^∞ fornita dall'argomento di *bootstrap*.

Che $y = f(x)$ sia in effetti definita da quel $-\alpha$ fino all'∞ lo si può vedere riprendendo l'argomento della dimostrazione del teorema. Infatti per ogni $\overline{x} > 0$ la $y \mapsto F(\overline{x}, y)$ è negativa per $y = 0$, e siccome tende crescendo all'∞ per $y \to \infty$ esiste un unico $\overline{y}$, dunque un $f(\overline{x})$, tale che $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. In $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ sono ancora soddisfatte le ipotesi del Teorema di Dini, ancora con la regolarità C^∞ fornita dall'argomento di *bootstrap*.

(ii) Utilizzando le regole di derivazione della funzione implicita nel punto 0 otteniamo
$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = x - \frac{1}{2}x^2$$
e quindi
$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} :$$
il limite in questione non esiste.

Esercizio 2 Sia
$$F(x,y) = y^3 + (x^2+1)y - 3x^2.$$

(i) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente su tutto $\mathbb{R}$ una funzione $y = g(x)$ di classe C^∞ tale che $F(x, g(x)) = 0$.

(ii) Calcolare le derivate $g'(1)$ e $g''(1)$.

Risposta (i) Per ogni $\overline{x} > 0$ la $y \mapsto F(\overline{x}, y)$ è crescente, dal momento che
$$F_y(\overline{x}, y) = 3y^2 + x^2 + 1 \geq 1 :$$
siccome tende a $\pm\infty$ per $y \to \pm\infty$, esiste un unico $\overline{y}$, dunque un $g(\overline{x})$, tale che $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. In $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ sono ancora soddisfatte le ipotesi del Teorema di Dini, con la regolarità C^∞ fornita dall'argomento di *bootstrap*.

(ii)
$$F(x, g(x)) \equiv 0 \to \begin{cases} F_x + F_y g'(x) = 0, \\ F_{xx} + 2F_{xy}g'(x) + F_{yy}(g'(x))^2 + F_y g''(x) = 0 \end{cases}$$
$$F(1, y) = 0 \to y = 1 : \quad g(1) = 1$$

$$F_x(1,1)+F_y(1,1)g'(1)=0 \qquad -4+5g'(1)=0 \qquad \to g'(1)=\frac{4}{5}$$

$$-4+2\times 4\frac{4}{5}+6\times(\frac{4}{5})^2+5\,g''(1)=0 \qquad \to g''(1)=-\frac{156}{125}$$

Esercizio 3 Dato il sistema

$$\begin{cases} y^2+x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

(i) dimostrare che in un intorno del punto $(0,0,1)$ esso definisce implicitamente due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ tali che $(x, \alpha(x), \beta(x))$ siano soluzioni del sistema;

(ii) calcolare $\alpha'(0), \beta'(0)$.

Risposta (i) Il punto $(0,0,1)$ soddisfa il sistema e lo jacobiano

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y+1 & 1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}$$

possiede, nel punto, determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per cui la possibilità di esprimere implicitamente y e z in funzione della x, per x in un intorno I dell'origine, segue dal Teorema di Dini per i sistemi.

(ii) Posto $f(x,y,z)=y^2+x+y+z-1$ e $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ si ha, sostituendo ad y e a z le $\alpha(x)$ e $\beta(x)$

$$\begin{cases} f(x,\alpha(x),\beta'(x)) \equiv 0 \\ g(x,\alpha(x),\beta'(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

da cui, derivando rispetto a x,

$$\begin{cases} f_x+f_y\alpha'(x)+f_z\beta'(x)=0 \\ g_x+g_y\alpha'(x)+g_z\beta'(x)=0 \end{cases}$$

Lavorando nel punto $(0,0,1)$ si ha

$$\begin{cases} 1+\alpha'(0)+\beta'(0)=0 \\ 2\beta'(0)=0 \end{cases} \to \alpha'(0)=-1,\ \beta'(0)=0$$

Esercizio 4 Dimostrare che l'equazione $F(x,y)=e^{\tan(x+y)}-x-3y-1=0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0,0)$ una funzione $y=f(x)$ tale che $F(x,f(x))=0$. Dire se in 0 la funzione f ammette max o min relativo.

Risposta Per dimostrare la prima parte è sufficiente applicare il teorema del Dini. Osserviamo che $F(0,0)=0$ e $F_x(x,y)=\frac{e^{\tan(x+y)}}{\cos^2(x+y)}-1$, $F_y(x,y)=\frac{e^{\tan(x+y)}}{\cos^2(x+y)}-3$. Dunque $F_y(0,0)=-2$, per cui esiste $f(x)$ definita implicitamente dall'equazione $F(x,y)=0$ in un intorno di $(0,0)$. Inoltre

$$f'(0)=\frac{-F_x(0,0)}{F_y(0,0)}=0.$$

Per vedere se la funzione f in 0 ammette max o min relativo calcoliamo la sua derivata seconda in 0. Siccome $F_{xx}(x,y) = \frac{e^{\tan(x+y)}}{\cos^4(x+y)} - \frac{-2\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} e^{\tan(x+y)}$ si ha

$$f''(0) = \frac{-F_{xx}(0,0)}{F_y(0,0)} = \frac{1}{2},$$

e quindi $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f.

Esercizio 5 Assegnata la funzione

$$F(x,y,z) = \sin(xy)\cos z + 3e^{x+y}z - 1,$$

verificare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ soddisfa nel punto $(0,0,1/3)$ le condizioni del teorema di Dini e determinare l'equazione del piano tangente alla superficie definita dall'equazione $F(x,y,z) = 0$ in $(0,0,1/3)$.

Risposta Tenuto conto che $F(x,y,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, che $F(0,0,1/3) = 0$ e che

$$\nabla F(x,y,z) = (y\cos(xy)\cos z + 3e^{x+y}z, x\cos(xy)\cos z + 3e^{x+y}z, -\sin(xy)\sin z + 3e^{x+y}),$$

per cui $\nabla F(0,0,1/3) = (1,1,3) \neq 0$, nel punto $(0,0,1/3)$ risultano soddisfatte le condizioni del Teorema di Dini; l'equazione del piano tangente è

$$F_x(0,0,1/3)(x-0) + F_y(0,0,1/3)(y-0) + F_z(0,0,1/3)(z-1/3) = 0$$

cioè $x + y + 3(z - 1/3) = 0$.

Naturalmente saremmo potuti arrivare allo stesso risultato elaborando l'enunciato del Teorema di Dini e scrivendo l'equazione del piano tangente al grafico di una delle funzioni $z = \varphi(x,y)$, $y = \psi(x,z)$, $x = \chi(y,z)$ definite implicitamente intorno a $(0,0,1/3)$ da $F(x,y,z) = 0$ grazie rispettivamente a $F_z(0,0,1/3) = 3 \neq 0$, $F_y(0,0,1/3) = 1 \neq 0$, $F_x(0,0,1/3) = 1 \neq 0$.

Esercizio 6 Dimostrare che in un opportuno intorno di $(x,y) = (0,0)$ esiste una funzione f di classe C^1 che si annulla in $(0,0)$ e verifica l'equazione $x + y + f(x,y) = \sin[xyf(x,y)]$.

Risposta Si applica il Teorema di Dini alla funzione di *tre* variabili

$$F(x,y,z) = x + y + z - \sin(xyz)$$

che in $(0,0,0)$ si annulla, mentre la sua derivata soddisfa

$$F_z(x,y,z) = 1 - xy\cos(xyz) \Longrightarrow F_z(0,0,0) = 1.$$

La superficie di livello 0 determinata cioè dall'equazione $F(x,y,z) = 0$ coincide con il grafico $z = f(x,y)$ di una funzione di classe C^1 in un intorno di $(0,0)$, nulla in $(0,0)$, funzione che quindi in tale intorno verifica l'equazione

$$x + y + f(x,y) = \sin[xyf(x,y)].$$

Esercizio 7 Determinare max e min assoluto della funzione $G(x,y) = x - y$ sui punti del piano soggetti al vincolo $F(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

Risposta Il luogo geometrico determinato dal vincolo è un'ellisse di semiassi di lunghezza rispettivamente 2 e 3. Trattandosi di un insieme compatto, ogni funzione continua ammetterà su esso massimo e minimo assoluto. Procediamo con i moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ 1 + \lambda(\frac{x}{2}) = 0 \\ -1 + \lambda(\frac{2y}{9}) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando le ultime 2 equazioni abbiamo $x = \frac{-2}{\lambda}$, $y = \frac{9}{2\lambda}$: sostituiamo nella prima e otteniamo

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 0,$$

da cui $\lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}$. Otteniamo così punti $P_1 = (\frac{-4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}})$ e $P_2 = (\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{-9}{\sqrt{13}})$: P_1 è il punto di minimo assoluto e P_2 è quello di massimo assoluto.

Osserviamo che l'esercizio si poteva svolgere anche parametrizzando l'ellisse e studiando poi la funzione di una variabile, ma sicuramente la strada sarebbe stata più lunga e comunque avrebbe richiesto conoscenze trigonometriche che con l'approccio da noi usato non sono state necessarie.

Esercizio 8 Discutere la natura dei punti critici interni e trovare massimi e minimi vincolati della seguente funzione:

$$f(x,y) = x^6 y^{8/3} \quad \text{su} \quad x^4 + y^4 \leq 13$$

Soluzione: La funzione è non-negativa ed ha gradiente è nullo solo sulle rette $x = 0$ e $y = 0$, che sono quindi di minimo. Per i massimi si utilizzano i moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 6x^5 y^{8/3} + 4\lambda x^3 = 0 \\ \dfrac{8x^6 y^{5/3}}{3} + 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 13 \end{cases}$$

per cui si ottiene

$$6x^2 y^{8/3} + 4\lambda = 0 \Longrightarrow \frac{8x^6 y^{5/3}}{3} = 6x^2 y^{17/3} \Longrightarrow \frac{8x^4}{3} = 6y^4$$

e si arriva ai punti di massimo $\pm(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, $\pm(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

Esercizio 9 Calcolare il max e il min assoluti di $x^3 + y^3$ nel dominio

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \leq 1\}.$$

Risposta Osserviamo preliminarmente che l'insieme E è un compatto, per cui il teorema di Weierstrass assicura che la funzione assume in E massimo e minimo assoluti. I punti in cui essi sono assunti vanno cercati tra a) i punti critici della funzione $g(x,y) = x^3 + y^3$ interni ad E, b) i punti della frontiera di E trovati tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (tenendo conto che il vincolo in questo caso non presenta punti singolari).

L'unico punto critico di g interno ad E è il punto $(0,0)$, che non è né di massimo né di minimo: basta notare che la restrizione di g alla retta $y=0$ è la funzione x^3, che in $x=0$ ha un flesso.

Passiamo al sistema ottenuto con i moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}=1 \\ 3x^2+\lambda\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=0 \\ 3y^2+\lambda\frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}=0. \end{cases}$$

Partendo dalla seconda equazione

$$x^{\frac{1}{3}}\left(3x^{\frac{5}{3}}+\lambda\frac{4}{3}\right)=0$$

otteniamo che x deve essere uguale a 0 oppure $x^{\frac{5}{3}}=-\frac{4}{9}\lambda$. Analogamente dalla terza equazione

$$y^{\frac{1}{3}}\left(3y^{\frac{5}{3}}+\lambda\frac{4}{3}\right)=0$$

otteniamo che y deve essere uguale a 0 oppure $y^{\frac{5}{3}}=-\frac{4}{9}\lambda$. Prima di dividere per x o per y, bisogna considerare i casi $x=0$ e $y=0$: la prima equazione implica $y=\pm1$ nel primo caso e $x=\pm1$ nel secondo caso. Se x ed y sono entrambe diverse da zero dev'essere invece $x^{\frac{5}{3}}=-\frac{4}{9}\lambda$ e $y^{\frac{5}{3}}=-\frac{4}{9}\lambda$, per cui necessariamente $x=y$. Usando di nuovo la prima equazione otteniamo $2x^{\frac{4}{3}}=1$ da cui $x=y=\pm2^{-\frac{3}{4}}$. Per determinare massimo e minimo assoluto dobbiamo considerare i vari candidati: $(0,0)$ (in realtà già escluso) $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$ e $\pm(2^{-\frac{3}{4}},2^{-\frac{3}{4}})$. Sostituendo si ottiene che 1 $(22^{-\frac{9}{4}}=2^{-\frac{5}{4}}<1)$ è il massimo assunto nei punti $(0,1)$ e $(1,0)$, mentre -1 è il minimo assunto nei punti $(0,-1)$ e $(-1,0)$.