ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 8/11/2013

Esercizio 1 Dire se le funzioni

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \quad \frac{e^x-1}{x^2}, \quad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $[0,1]$ e $(0,+\infty)$.

Esercizio 2 Verificare se gli integrali impropri

$$G_1 = \int_0^1 (e^{x^2}-1)^{-1/3}\,dx, \quad G_2 = \int_0^1 (1-\cos x^2)^{-1/3}\,dx$$

convergono.

Esercizio 3 Dati gli integrali impropri

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x}{x^2}\,dx, \quad J_2 = \int_1^\infty x^\beta e^{-\sqrt{x}}\,dx,$$

determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge J_1 e per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge J_2.

Esercizio 4 Studiare il carattere delle serie

$$S_1 = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log^2 n}, \quad S_2 = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n \log(\log n)}.$$

Esercizio 5 Calcolare la derivata rispetto ad x della funzione

$$F(x) = \int_{5x}^{x^2} \frac{e^{xt^2}}{t}\,dt, \quad x>0.$$

Esercizio 6 Dimostrare che la funzione

$$x^\beta e^{-x}$$

è integrabile in senso improprio nell'intervallo $(1,+\infty)$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolare l'integrale per $\beta = 0,1,2$.

Esercizio 7 (i) Calcolare

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt$$

nei punti x in cui l'integrale improprio converge.

(ii) Senza preoccuparsi di verificare le ipotesi che giustificano il procedimento, scrivere le espressioni integrali di $F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots, F^{[n]}(x)$ e ricavarne in particolare

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$$

(iii) Giustificare il procedimento seguito nel punto precedente.

Esercizio 8 Sia

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2 + t^2}\, dx.$$

(i) Determinare l'insieme $E \subseteq R$ nel quale l'integrale improprio è assolutamente convergente.
(ii) Provare che $F(t)$ è continua in E.
(iii) Provare che $F(t)$ è derivabile in E.

Esercizio 9 Sia

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos xt\, dt.$$

(i) Senza preoccuparsi di verificare le ipotesi che giustificano il procedimento, scrivere l'espressione integrale di $F'(x)$.
(ii) Giustificare il procedimento seguito nel punto precedente.
(iii) Calcolare l'espressione integrale di $F'(x)$, verificare che vale la relazione

$$F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$$

e dedurne che

$$F(x) = F(0) e^{-x^2/4}.$$

Esercizio 10 (i) Determinare per quali valori di α converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{e^{t^2} - 1}{t^\alpha}\, dt.$$

(ii) Calcolare il

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x \int_x^1 \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt.$$

Esercizio 11 Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\, dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

Esercizio 12 Siano

$$F(x,y,u,v) = x^2 - y^2 + uv, \quad G(x,y,u,v) = xy + u^2 - v^2.$$

Dimostrare che esistono un intorno B di $(0,1)$ ed un'unica coppia di funzioni $f, g : U \to \mathbb{R}$ con le proprietà

$$f(0,1) = g(0,1) = 1, \quad F(x,y,f(x,y)) = G(x,y,g(x,y)) = 0 \quad \text{per } (x,y) \in U$$

e calcolare il determinante jacobiano di (f,g) in $(0,1)$.

Esercizio 13 Data la funzione

$$h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(tx)}{t}\, dt, \quad x > 0,$$

calcolare $h'(\sqrt{\pi})$.