ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 8/11/2013

Premessa (Cfr. gli Appunti di Analisi Vettoriale 2011/12 del Prof. Troianiello) Nello studio degli integrali impropri il primo approccio all'utilizzo del criterio del confronto, quando si ha a che fare con funzioni f, g entrambe di segno costante, conviene tentarlo ricorrendo allo studio del limite del rapporto tra le due. Poniamoci ad esempio nel caso di $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b < \infty$, con $f \ge 0$ e $g > 0$ in $]a, b]$, entrambe integrabili secondo Riemann da A a b per ogni $A \in]a, b]$. Supponiamo che esista $L = \lim_{x \to a^+} f(x)/g(x)$ (necessariamente ≥ 0) . Allora:

- se $0 < L < \infty$, cosa che esprimiamo come $f(x) \approx g(x)$ per $x \to a^+$ — e quindi esiste un $\overline{A}$ tale che $Lg(x)/2 \le f(x) \le (L+1)g(x)$ per $a < x \le \overline{A}$ —, allora l'integrale improprio di f converge o diverge se e solo se, rispettivamente, converge o diverge quello di g;
- se $L = 0$ — sicché, fissato $\eta > 0$, esiste un $\overline{A}$ tale che $f(x) \le \eta g(x)$ per $a < x \le \overline{A}$ — allora la convergenza dell'integrale improprio di g implica quella dell'integrale improprio di f, mentre la divergenza dell'integrale improprio di f implica quella dell'integrale improprio di g;
- se $L = \infty$ — sicché, fissato $K > 0$, esiste un $\overline{A}$ tale che $f(x) \ge Kg(x)$ per $a < x \le \overline{A}$ — allora la convergenza dell'integrale improprio di f implica quella dell'integrale improprio di g, mentre la divergenza dell'integrale improprio di g implica quella dell'integrale improprio di f.

Esercizio 1 Dire se le funzioni

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x}, \quad \frac{e^x - 1}{x^2}, \quad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli $]0, 1]$ e $]0, +\infty[$.

Risposta Dal momento che $\frac{\sin(x)}{x}$ è sempre limitato in modulo da 1, la funzione

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2+1)x} = \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{x}{x^2+1}$$

si prolunga con continuità fino a 0, perché il suo limite per $x \to 0$ esiste e vale 0. Quindi su $]0, 1]$ l'integrale esiste (già) come integrale di Riemann. Invece su $x \ge 1$ l'integrando si maggiora con

$$\frac{1}{1+x^2},$$

sicché l'integrale improprio converge su $[1, +\infty[$ e in conclusione su tutto $]0, +\infty[$.

Consideriamo la funzione $\frac{e^x-1}{x^2}$. Su $]0, 1]$ possiamo utilizzare lo sviluppo di Maclaurin di $e^x - 1$, che ha come primo termine x, per cui

$$\frac{e^x - 1}{x} \approx 1 \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi

$$\frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{x^2} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to 0$$

(vd. la Premessa), e tenendo conto che $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $]0,1]$ se ne conclude che l'integrale improprio della funzione assegnata diverge su $]0,1]$. Dal momento poi che la funzione $\frac{e^x-1}{x^2}$ tende all'∞ per $x \to \infty$ (l'esponenziale a numeratore tende all'∞ più rapidamente più della potenza x^2 a denominatore) si riconosce che diverge l'integrale improprio su $[1,+\infty[$ e quindi, anche indipendentemente da quanto studiato su $]0,1]$, che esso diverge su tutto $]0,+\infty[$.

Consideriamo la funzione $\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$. Dalla maggiorazione

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

segue l'integrabilità della funzione assegnata su $]0,1]$. Per $x \geq 1$ riesce poi

$$\left|\frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}},$$

circostanza questa sufficiente a riconoscere la esistenza dell'integrale improprio anche su $[1,+\infty[$, e in conclusione su tutto $]0,+\infty)[$.

Esercizio 2 Verificare se gli integrali impropri

$$G_1 = \int_0^1 (e^{x^2}-1)^{-1/3}\,dx, \quad G_2 = \int_0^1 (1-\cos x^2)^{-1/3}\,dx$$

convergono.

Risposta Benché l'intervallo d'integrazione sia limitato, i due integrali sono impropri perché gli integrandi sono sì continui, però illimitati: per la precisione, essi tendono all'∞ quando $x \to 0^+$. Ma sia di $e^{x^2}-1$ che di $1-\cos x^2$ si esplicitano facilmente gli sviluppi di Taylor (anzi di MacLaurin). Dunque G_1 converge perché $e^{x^2}-1$ è infinitesimo dello stesso ordine del primo addendo non nullo del suo sviluppo, cioè di x^2, per cui

$$(e^{x^2}-1)^{-1/3} \approx (x^2)^{-1/3}$$

con

$$\int_0^1 (x^2)^{-1/3}\,dx < \infty;$$

invece G_2 diverge perché $1-\cos x^2$ è infinitesimo dello stesso ordine del primo addendo non nullo x^4 del suo sviluppo, per cui

$$(1-\cos x^2)^{-1/3} \approx (x^4)^{-1/3}$$

con

$$\int_0^1 (x^4)^{-1/3}\,dx = \infty.$$

Esercizio 3 Dati gli integrali impropri

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha x}{x^2}\,dx, \quad J_2 = \int_1^\infty x^\beta e^{-\sqrt{x}}\,dx,$$

determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge J_1 e per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ converge J_2.

Risposta J_1 converge se e solo se converge

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^\alpha}{x^2} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha}\, dx$$

ovvero se e solo se $2 - \alpha < 1 \iff \alpha > 1$.

J_2 converge per tutti i β: quando $x \to \infty$ l'integrando tende a 0 più rapidamente di ogni potenza della x, ad esempio più rapidamente di di x^{-2} che ha integrale improprio da 1 a ∞ convergente.

Esercizio 4 Studiare il carattere delle serie

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}, \quad S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log(\log n)}.$$

Risposta S_1 converge (assolutamente) e S_2 diverge: basta confrontarle rispettivamente con

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2 x} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^\infty = \frac{1}{\log 2} \quad \text{e} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x \log x \log(\log x)} = [\log(\log(\log x))]_2^\infty = \infty.$$

Esercizio 5 Calcolare la derivata rispetto ad x della funzione

$$F(x) = \int_{5x}^{x^2} \frac{e^{xt^2}}{t}\, dt, \quad x > 0.$$

Risposta Innanzitutto, calcoliamo

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{xt^2}}{t}\, dt = \int t e^{xt^2}\, dt = \int \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{xt^2}}{2}\, dt = \frac{e^{xt^2}}{2} + K$$

e quindi

$$\int_{5x}^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{xt^2}}{t}\, dt = \frac{e^{x^5}}{2} - \frac{e^{25x^3}}{2}.$$

La somma di quest'ultima quantità e di

$$2x \frac{e^{x^5}}{x^2} - \frac{e^{25x^3}}{x}$$

fornisce il risultato.

Esercizio 6 Dimostrare che la funzione

$$x^\beta e^{-x}$$

è integrabile in senso improprio nell'intervallo $]1, +\infty[$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e calcolarne l'integrale per $\beta = 0, 1, 2$.

Risposta La funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \frac{1}{m!}x^m + \ldots$$

verifica per ogni $x \geq 0$ e per ogni numero naturale m la diseguaglianza

$$e^x \geq \frac{1}{m!}x^m.$$

Pertanto

$$x^\beta e^{-x} = \frac{x^\beta}{e^x} \leq m! \frac{1}{x^{m-\beta}},$$

stima quest'ultima sufficiente per

$$m - \beta > 1$$

a riconoscere l'esistenza dell'integrale improprio su $]1, +\infty[$.

I valori richiesti sono

$$\begin{cases} \int_1^a e^{-x} dx & = e^{-1} - e^{-a} & \to & 1, \\ \int_1^a x\, e^{-x} dx & = 2\, e^{-1} - \frac{1+a}{e^a} & \to & 1, \\ \int_1^a x^2\, e^{-x} dx & = 5\, e^{-1} - \frac{2+2\,a+a^2}{e^a} & \to & 2. \end{cases}$$

Esercizio 7 (i) Calcolare

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$$

nei punti x in cui l'integrale improprio converge.

(ii) Senza preoccuparsi di verificare le ipotesi che giustificano il procedimento, scrivere le espressioni integrali di $F'(x), F''(x), F'''(x), \ldots, F^{[n]}(x)$ e ricavarne in particolare

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$$

(iii) Giustificare il procedimento seguito nel punto precedente.

Risposta (i) Dev'essere ovviamente $x > 0$, e in tal caso

$$\int_0^M e^{-xt} dt = -\frac{1}{x} \int_0^M (e^{-xt})' dt = -[e^{-xt}]_0^M = \frac{1 - e^{-xM}}{x},$$

da cui

$$\int_0^\infty e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x} \quad \text{per } x > 0.$$

Pertanto il calcolo esplicito fornisce:

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \ldots, \quad F^{[k]}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale si ottiene

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}dt \Longrightarrow F'(x) = \int_0^\infty -te^{-xt}dt \quad \text{per } x > 0.$$

Iterando il procedimento si ricava

$$F^{[k]}(x) = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-xt}dt$$

da cui, confrontando il calcolo precedente per le derivate $F^{[k]}(x)$ si ottiene

$$\int_0^\infty t^k e^{-xt}dt = \frac{k!}{x^{k+1}} \quad \text{per } kk \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\int_0^\infty t^k e^{-t}dt = k! \quad \text{per } k \in \mathbb{N}$$

prendendo $x = 1$.

Per giustificare le derivazioni sotto il segno d'integrale occorrono opportune maggiorazioni delle funzioni integrande $t^k e^{-xt}$. Se si fa variare x in *tutta* la semiretta $]0, \infty[$, le uniche maggiorazioni possibili sono coi $\sup_{x>0} t^k e^{-xt} = t^k$, che non hanno integrali impropri convergenti su $0 < t < \infty$. Però, siccome ogni punto $x > 0$ si trova in una semiretta $[\alpha, \infty[$ con $0 < \alpha < x$, ci basta ottenere *per ogni* $\alpha > 0$ le maggiorazioni richieste. A tal fine basta tener conto che

$$|t^k e^{-xt}| \leq g(t) = g_\alpha(t) = t^k e^{-\alpha t} \quad \text{per } x \geq \alpha, \quad 0 \leq t < \infty :$$

da qui segue che le ipotesi del teorema di continuità e derivabilità valgono, *per ogni* $\alpha > 0$, facendo variare x in $[\alpha, \infty[$, e quindi le derivazioni sono giustificate per ogni $x > 0$.

Esercizio 8 Sia

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\log x}{1 + x^2 + t^2}\, dx.$$

(i) Determinare l'insieme $E \subseteq R$ nel quale l'integrale improprio è assolutamente convergente.
(ii) Provare che $F(t)$ è continua in E.
(iii) Provare che $F(t)$ è derivabile in E.

Risposta (i) Siccome per ogni $x > 0$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$ il valore assoluto dell'integrando si maggiora con $g(x)$, dove $g(x) = |\log x|/(1 + x^2)$, basta mostrare che $g(x)$ è integrabile (in senso improprio) da 0 a ∞ per concludere che $E = \mathbb{R}$. Ora,

$$\int_0^1 \frac{|\log x|}{1 + x^2}\, dx < \infty$$

per il confronto asintotico: per $x \to 0^+$ l'infinito $(\log x)/1 + x^2$ è dello stesso ordine di $\log x$, che (essendo la derivata di $x \log x - x$) è assolutamente integrabile (in senso improprio) da 0 a 1. D'altra parte, per $x \to \infty$ l' ordine dell'infinitesimo $(\log x)/1 + x^2$ è superiore a quello di qualunque potenza x^α con $\alpha < 2$, e quindi

$$\int_1^\infty \frac{|\log x|}{1 + x^2}\, dx < \infty.$$

(ii) La maggiorazione uniforme del modulo dell'integrando, vista nel passo precedente, con la funzione $g(x)$ mostra che $F(t)$ è continua per ogni t, cioè in tutto E.

(iii) Tenuto presente che

$$f_t(x,t) = \frac{-2t\log x}{(1+x^2+t^2)^2}$$

e quindi

$$|f_t(x,t)| \leq \frac{2|t|}{1+x^2+t^2} \cdot \frac{|\log x|}{1+x^2+t^2} \leq g(x),$$

dove abbiamo maggiorato $2|t|$ con $(1-|t|)^2 + 2|t| = 1 + t^2$, si deduce che $F(t)$ è derivabile e che

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{-2t\log x}{(1+x^2+t^2)^2}dx.$$

Esercizio 9 Sia

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos xt\, dt.$$

(i) Senza preoccuparsi di verificare le ipotesi che giustificano il procedimento, scrivere l'espressione integrale di $F'(x)$.

(ii) Giustificare il procedimento seguito nel punto precedente.

(iii) Calcolare l'espressione integrale di $F'(x)$, verificare che vale la relazione

$$F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$$

e dedurne che

$$F(x) = F(0)e^{-x^2/4}.$$

Risposta (i) Derivando sotto il segno di integrale si ottiene

$$F'(x) = -\int_0^{\infty} te^{-t^2}\sin xt\, dt.$$

(ii) Per giustificare la derivazione sotto il segno d'integrale basta tener conto che sia nell'espressione di $F(x)$ e sia in quella di $F'(x)$ gli integrandi sono uniformemente dominati da funzioni della sola t integrabili da 0 a ∞:

$$|e^{-t^2}\cos xt| \leq e^{-t^2}, \quad |te^{-t^2}\sin xt| \leq te^{-t^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,\infty[.$$

(iii) Integrando per parti si ottiene

$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} -2te^{-t^2}\sin xt\, dt = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin xt\right]_0^{\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} te^{-t^2}x\cos xt\, dt = -\frac{x}{2}F(x).$$

Dunque $F(x)$ soddisfa l'equazione lineare omogenea del I ordine

$$y' = -\frac{x}{2}y,$$

il cui integrale generale è $Ce^{-x^2/4}$, insieme alla condizione iniziale

$$y(0) = F(0)$$

(e si potrebbe completare sapendo che l'integrale di e^{-t^2} da 0 a ∞, cioè $F(0)$, vale $\pi/4$).

Esercizio 10 (i) Determinare per quali valori di α converge l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{e^{t^2}-1}{t^\alpha}\,dt.$$

(ii) Calcolare il

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \int_x^1 \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt.$$

Risposta (i) Utilizzando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{t^2}-1}{t^2} = 1$$

deduciamo che per t tendente a 0^+ risulta

$$\frac{e^{t^2}-1}{t^\alpha} \approx \frac{1}{t^{\alpha-2}},$$

e quindi l'integrale dato è convergente se e solo se $\alpha < 3$.

(ii) Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x) \int_x^1 \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) \left(\int_x^1 \frac{e^{t^2}-1}{t^2}\,dt + \int_x^1 \frac{1}{t^2}\,dt \right).$$

Usando quanto visto in (i) (con $\alpha = 2$) sappiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{e^{t^2}-1}{t^2}\,dt$$

esiste finito, per cui

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x) \int_x^1 \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \sin x \int_x^1 \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 1.$$

Questo si poteva fare anche utilizzando de l'Hopital una volta riscritto $\sin(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sin(x)}}$.

Esercizio 11 Dire per quali $\beta > 0$ esiste l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\,dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

Risposta La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{x \log^\beta (x)}$$

è positiva su $(2, +\infty)$: pertanto per decidere se l'integrale improprio esiste basta esaminare se esiste il limite

$$\lim_{t\to +\infty} \int_2^t \frac{1}{x \log^\beta (x)} dx$$

Il calcolo è facile:

i) se $\beta \neq 1$ riesce
$$\int_2^t \frac{1}{x \log^\beta x} dx = \frac{1}{1-\beta} \left\{ (\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta} \right\}$$

ii) se $\beta = 1$ riesce
$$\int_2^t \frac{1}{x \log x} dx = \log(\log(t)) - \log(\log(2))$$

Pertanto nel primo caso si ha convergenza solo se $\beta > 1$, mentre nel secondo caso non c'è convergenza.

RIASSUMENDO: l'integrale improprio richiesto converge se e solo se $\beta > 1$. Per tali valori di β l'integrale vale
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1-\beta} \left\{ (\log(t))^{1-\beta} - (\log(2))^{1-\beta} \right\} = \frac{(\log(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

Esercizio 12 Siano
$$F(x, y, u, v) = x^2 - y^2 + uv, \quad G(x, y, u, v) = xy + u^2 - v^2.$$

Dimostrare che esistono un intorno U di $(0, 1)$ ed un'unica coppia di funzioni $f, g : U \to \mathbb{R}$ con le proprietà
$$f(0, 1) = g(0, 1) = 1, \quad F(x, y, f(x, y)) = G(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \text{per } (x, y) \in U$$

e calcolare il determinante jacobiano di (f, g) in $(0, 1)$.

Risposta Per dimostrare il risultato richiesto basta applicare il Teorema del Dini nella sua versione più generale valida anche per i sistemi. Innanzitutto, dunque, osserviamo che $F(0, 1, 1, 1) = G(0, 1, 1, 1) = 0$. Calcoliamo poi $\partial_u F(x, y, u, v) = v$, $\partial_v F(x, y, u, v) = u$, $\partial_u G(x, y, u, v) = 2u$, $\partial_v G(x, y, u, v) = -2v$: siccome la matrice
$$A := \begin{bmatrix} \partial_u F(0, 1, 1, 1) & \partial_v F(0, 1, 1, 1) \\ \partial_u G(0, 1, 1, 1) & \partial_v G(0, 1, 1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, le ipotesi del Teorema del Dini sono soddisfatte, e quindi in un opportuno intorno U del punto $(0, 1)$ è assicurata l'esistenza della coppia di funzioni (f, g) con le proprietà richieste. Lo jacobiano di (f, g) si calcola tramite la formula fornita tramite il Teorema del Dini da cui
$$Jac\, g(0, 1) = -A^{-1} B$$

dove B è la matrice
$$\begin{bmatrix} \partial_x F(0, 1, 1, 1) & \partial_y F(0, 1, 1, 1) \\ \partial_x G(0, 1, 1, 1) & \partial_y G(0, 1, 1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui
$$Jac\, g(0, 1) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 13 Data la funzione
$$h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(tx)}{t} \, dt, \quad x > 0,$$

calcolare $h'(\sqrt{\pi})$.

Risposta Basta osservare che in questo caso si applica la formula per la derivazione di integrali definiti dipendenti da un parametro:

$$h'(x) = \int_x^{3x} [-\sin(tx)]\, dt + 3\frac{\cos(3x^2)}{3x} - \frac{\cos(x^2)}{x} = \frac{\cos(3x^2)}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x} + \frac{\cos(3x^2)}{x} - \frac{\cos(x^2)}{x}$$

$$= 2\frac{\cos(3x^2)}{x} - 2\frac{\cos(x^2)}{x}.$$

Da qui otteniamo in particolare $h'(\sqrt{\pi}) = 0$.