

ANALISI VETTORIALE — I COMPITO D'ESONERO

Esercizio 1 Sia

$$F(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t/x}}{t} dt, \quad x > 0.$$

(i) Calcolare $F'(x)$.

(ii) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x).$$

Esercizio 2 Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\tan(1/n)}{(\log n)^\alpha}$$

Esercizio 3 Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ converge il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin(1/t)|^\alpha}{t^{1/2}} dt$$

Esercizio 4 Dimostrare che l'equazione $e^y = x^2 e^y + y$ definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(1, 0)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(1, 0)$. Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ di ordine 2 della $f(x)$.

Esercizio 5 Siano

$$f(x, y) = x^2 + x - y^2 + 2y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

Giustificare l'esistenza di $\max_D f$ e $\min_D f$ e calcolarli.

Esercizio 6 Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(xy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Stabilire se f : è continua in $(0, 0)$; è derivabile in $(0, 0)$; è differenziabile in $(0, 0)$. Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$, per ogni direzione v .