ANALISI VETTORIALE — I COMPITO D'ESONERO

Esercizio 1 Sia

$$F(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t/x}}{t} dt, \quad x > 0.$$

(i) Calcolare $F'(x)$.
(ii) Calcolare il

$$\lim_{x\to\infty} xF(x).$$

Risposta (i) Calcoliamo $F'(x)$ con le note formule

$$F'(x) = \frac{4xe^{-2x}}{2x^2} - \frac{2xe^{-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{2x^2} e^{-t/x}dt = \frac{2e^{-2x}}{x} - \frac{2e^{-x}}{x} - \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x}.$$

Un errore grave è stato l'aver dimenticato il segno $-$ nell'integrazione di $e^{-t/x}$.

(ii) Per calcolare il limite ci serviamo delle disuguaglianze

$$(*) \qquad 0 \le F(x) \le x^2 \frac{e^{-x}}{x^2}$$

con la seconda valida perché per ogni $x > 0$ l'integrando, essendo una funzione decrescente della t, nell'intervallo $[x^2, 2x^2]$ è maggiorata dal valore che assume nell'estremo inferiore x^2 e quindi verifica

$$\frac{e^{-t/x}}{t} \le \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

Dunque per $x \to \infty$ si ha $F(x) \to 0$, per cui $xF(x)$ è una forma indeterminata e si può applicare il teorema dell'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} xF(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{-1/x^2} = 0.$$

Ma in effetti, senza bisogno di applicare il teorema dell'Hopital, basta tener conto che la (*) implica non solo $F(x) \to 0$ ma anche

$$0 \le xF(x) \le xe^{-x} \to 0 \quad \text{per } x \to \infty.$$

Esercizio 2 Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\tan(1/n)}{(\log n)^\alpha}$$

Risposta Si utilizza il criterio integrale, passando all'integrale improprio

$$\int_3^\infty \frac{\tan(1/x)}{(\log x)^\alpha}\, dx$$

quindi si applica il criterio del confronto:

$$\frac{\tan(1/x)}{(\log x)^\alpha} \approx \frac{1}{x(\log x)^\alpha}.$$

Attenzione: tanti scrivono invece

$$\frac{\tan(1/x)}{(\log x)^\alpha} \leq \frac{1}{x(\log x)^\alpha},$$

e questo è falso!

Siccome

$$\frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$

è la derivata di $(\log x)^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ per $\alpha \neq 1$ e di $\log(\log x)$ per $\alpha = 1$, e quindi

$$\int_3^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\,dx < \infty \iff \alpha > 1,$$

si conclude che la serie converge $\iff \alpha > 1$.

Esercizio 3 Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ converge il seguente integrale improprio:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(1/t)|^\alpha}{t^{1/2}}\,dt$$

Risposta Vanno studiati separatamente

$$I_1 = \int_0^1 \frac{|\sin(1/t)|^\alpha}{t^{1/2}}\,dt, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{|\sin(1/t)|^\alpha}{t^{1/2}}\,dt.$$

Errore purtroppo tipico: si scrive l'equivalenza asintotica

$$(**) \qquad |\sin(1/t)|^\alpha \approx 1/t^\alpha$$

nello studio di I_1, dove essa è falsa perché si deve far tendere t a 0 e quindi $1/t$ all'∞, mentre non la si scrive nello studio di I_2, dove è vera — e essenziale! — perché lì si deve far tendere t all'∞ e quindi $1/t$ a 0.

Invece, siccome il modulo del seno è sempre ≤ 1, l'integrando di I_1 è sempre maggiorato da $1/t^{1/2}$, e quindi I_1 converge per ogni $\alpha > 0$. Naturalmente per $\alpha > 0$ è anche vera la disuguaglianza

$$\frac{|\sin(1/t)|^\alpha}{t^{1/2}} \leq \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{t^{1/2}}$$

che peggiora notevolmente la (**), visto che a secondo membro fa comparire, invece di una costante, una funzione che comunque tende all'∞ per $t \to 0$, e che per $\alpha \geq 1/2$ ha integrale improprio da 0 a 1 divergente!

Per I_2 utilizziamo la (**), e siccome $1/t^{\alpha+1/2}$ ha integrale improprio da 1 a ∞ convergente se e solo se $\alpha + 1/2 > 1$, ricaviamo che I_2, e quindi anche l'integrale di partenza, converge se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 4 Dimostrare che l'equazione $e^y = x^2e^y + y$ definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno del punto $(1, 0)$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(1, 0)$. Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ di ordine 2 della $f(x)$.

Risposta La funzione $F(x, y) = e^y - x^2e^y - y$ verifica le ipotesi del teorema di Dini. Infatti si ha:

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^2),\ F_y(1, 0) = -1 \neq 0.$$

Esiste dunque una $f \in C^\infty(I)$ definita implicitamente dalla relazione $F(x, f(x)) = 0$. Inoltre

$$f'(1) = -\frac{F_x(1, 0)}{F_y(1, 0)} = -2$$

e la retta tangente ha equazione $y - y(1) = y'(1)(x - 1)$ cioè $y = -2(x - 1)$.

Il polinomio di Taylor richiesto è

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2.$$

Dalla relazione $F(x, f(x)) = 0$, applicando due volte la formula di derivazione delle funzioni composte, si trova

$$f''(1) = -\frac{2F_{xy}(1, 0)f'(1) + F_{yy}(1, 0)(f'(1))^2 + F_{xx}(1, 0)}{F_y(1, 0)} = 6$$

per cui

$$T_2(x) = 2 - 2x + 3(x - 1)^2.$$

Esercizio 5 Siano

$$f(x, y) = x^2 + x - y^2 + 2y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/2 + (y - 1)^2 \leq 1\}.$$

Giustificare l'esistenza di $\max_D f$ e $\min_D f$ e calcolarli.

Risposta D è chiuso e limitato, perché è costituito da un'ellisse e dai punti interni ad essa, e f è continua in D. Dunque l'esistenza di $\max_D f$ e $\min_D f$ segue dal teorema di Weierstrass.

Innanzitutto vanno cercati e studiati gli eventuali punti critici interni a D, cosa che tanti hanno trascurato di fare. Si vede subito che l'unico punto interno critico per f è $(-1/2, 1)$ e che si tratta di un punto di sella, perché l'hessiana vi è indefinita: $f_{xx} = 2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 0$.

Sulla frontiera procediamo coi moltiplicatori di Lagrange:

$$2x + 1 + \lambda x = 0, \quad 2 - 2y + \lambda(2y - 2) = 0, \quad x^2/2 + (y - 1)^2 - 1 = 0.$$

La seconda equazione dà $2(1 - y)(1 - \lambda) = 0$, che si annulla se $y = 1$ o $\lambda = 1$.

Se $y = 1$ si trovano i punti

$$P_1 = (\sqrt{2}, 1), \lambda = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad P_2 = (-\sqrt{2}, 1), \lambda = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Se $\lambda = 1$ la prima equazione dà $x = -1/3$, e infine la terza dà $y = \pm\sqrt{17/18} + 1$, da cui i punti

$$P_3 = (-\frac{1}{3}, 1 - \frac{\sqrt{34}}{6}),\ P_4 = (-\frac{1}{3}, 1 + \frac{\sqrt{34}}{6}).$$

Siccome

$$f(P_1) = 3 + \sqrt{2},\ f(P_2) = 3 - \sqrt{2},$$
$$f(P_3) = -\frac{1}{6},\ f(P_4) = -\frac{1}{6}$$

si conclude che

$$\max_D f = f(P_1) = 3 + \sqrt{2}, \qquad \min_D f = f(P_3) = f(P_4) = -\frac{1}{6}.$$

Esercizio 6 Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire se f: è continua in $(0,0)$; è derivabile in $(0,0)$; è differenziabile in $(0,0)$. Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, per ogni direzione v.

Risposta Innanzitutto:

$$(**) \qquad \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} \to \frac{1}{2} \quad \text{per } (x,y) \to (0,0).$$

Grazie alla (**), la funzione f è continua in $(0,0)$. Infatti

$$f(x,y) \approx \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Inoltre, siccome $f = 0$ sugli assi coordinati, troviamo $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Passando alla differenziabilità, tantissimi si sono precipitati ad affermare che si applica il teorema del differenziale totale, convincendosi chissà come di aver mostrato la continuità delle derivate parziali nell'origine. Invece, siccome

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

e l'ultima frazione non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$, la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

Infine

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} \frac{t^4 v_1^2 v_2^2}{t^4(v_1^2+v_2^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} v_1^2 v_2^2$$

per ogni direzione (v_1, v_2): si noti che, se non si fosse dimostrata precedentemente la non differenziabilità, la si sarebbe potuta dedurre a questo punto dal fatto che non vale l'identità

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (v_1, v_2) = 0.$$