ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 22/11/2013

Esercizio 1 Calcolare la 24esima derivata del logaritmo nel punto 1.

Esercizio 2 Esprimere sotto forma di serie l'integrale

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1} \log^n(x).$$

Esercizio 4 Dopo aver studiato la convergenza della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx},$$

si calcoli

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza assoluta della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$ e calcolare la sua somma.

Risposta Con la sostituzione $y = x/(1-x)^2$ la serie di partenza diventa la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$, che converge assolutamente per $|y| < 1$ alla funzione $1/(1-y)$ mentre non converge per $|y| \geq 1$. Dunque la serie di partenza converge assolutamente per $|x| < (1-x)^2$, ovvero per $x < (3-\sqrt{5})/2$ e per $x > (3+\sqrt{5})/2$, alla funzione

$$\frac{1}{1-\frac{x}{1-2x+x^2}} - 1 = \frac{x}{1-3x+x^2},$$

mentre non converge al di fuori delle due semirette.

Esercizio 6 Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{x}{4^n}$:
(i) determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie converge assolutamente;
(ii) determinare il sottoinsieme di E in cui la serie converge totalmente;
(iii) calcolare la derivata della serie nei punti in cui questa è derivabile;
(iv) mostrare che la serie non converge totalmente in tutto E.

Esercizio 7 Studiare la convergenza assoluta e quella totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sqrt{n}x}$.

Esercizio 8 Studiare la convergenza assoluta e quella totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}$.

Esercizio 9 Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n^2} :$$

(i) determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie converge;
(ii) determinare il sottoinsieme di E in cui la serie converge totalmente;
(iii) determinare il sottoinsieme di E in cui la serie risulta derivabile.

Esercizio 10 (i) Determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie $\sum n^{\log x}$ converge e il sottoinsieme di E in cui la convergenza è totale.

(ii) Servendosi di (i), determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie $\sum x^{\log n}$ converge e il sottoinsieme di E in cui la convergenza è totale.