ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 22/11/2013

Esercizio 1 Calcolare la 24esima derivata del logaritmo nel punto 1.

Risposta Si tratta di calcolare

$$\frac{d^{24}}{dx^{24}} \log(1+x)\Big|_{x=0} = a_{24} \cdot 24!$$

dove a_{24} è il termine di indice $n = 24$ nello sviluppo di Maclaurin

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

di $\log(1+x)$, per cui

$$\frac{d^{24}}{dx^{24}} \log(y)\Big|_{y=1} = -(24!)\frac{1}{24} = -23!.$$

Esercizio 2 Esprimere sotto forma di serie l'integrale

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx.$$

Risposta Dallo sviluppo in serie

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!},$$

valido in tutto $\mathbb{R}$, in particolare dunque con convergenza uniforme nell'intervallo $[0,1]$, ricaviamo la richiesta espressione dell'integrale:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)}.$$

Questa identità non consente di ricavare esattamente il valore numerico dell'integrale, ma pur tuttavia di approssimarlo coi valori delle ridotte della serie.

Concludiamo osservando che la funzione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

fornisce sotto forma di serie di potenze una primitiva della celeberrima funzione e^{x^2}.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1} \log^n(x).$$

Risposta La serie ha senso per $x > 0$; inoltre, ponendo $y = \log(x)$, ci riconduciamo allo studio della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1} y^n.$$

Ora, siccome

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n^2+1}} = 1,$$

il raggio di convergenza della serie è uguale ad 1. Quindi la serie converge assolutamente nell'intervallo $]-1,1[$ e uniformemente negli intervalli chiusi di $]-1,1[$. Vediamo cosa succede agli estremi. Per $y = -1$ otteniamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1},$$

che si comporta come la serie armonica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ ed è quindi divergente. Per $y = 1$ abbiamo la serie a segni alterni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-n}(n+2)}{n^2+1},$$

che converge grazie al criterio di Leibniz. Tornando alla serie di funzioni iniziale, abbiamo che essa converge per $-1 < \log(x) \leq 1$, ovvero nell' intervallo $(e^{-1}, e]$, e totalmente, dunque uniformemente, in tutti gli intervalli chiusi contenuti in (e^{-1}, e).

Esercizio 4 Dopo aver studiato la convergenza della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx},$$

si calcoli

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

Risposta Possiamo studiare questa serie ponendo $y = e^{-x}$ e considerando la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} ny^n.$$

Questa ha raggio di convergenza uguale ad 1, per cui fissato un qualsiasi intervallo compatto $[a,b] \in (-1,1)$, abbiamo convergenza totale in tutti gli insiemi delle $x \in \mathbb{R}$ tali che $e^{-x} \in [a,b]$. In particolare avremo convergenza totale in tutti gli insiemi del tipo $[\epsilon, +\infty)$ con $\epsilon > 0$.

Lo studio precedente ci assicura che in particolare la serie converge uniformemente nell'intervallo $[1,2]$, per cui

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_1^2 e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-n} - e^{-2n}}{n}$$
$$= \frac{1}{1-e} - \frac{1}{1-e^2} = \frac{e}{1-e^2}.$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza assoluta della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$ e calcolare la sua somma.

Risposta Con la sostituzione $y = x/(1-x)^2$ la serie di partenza diventa la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$, che converge assolutamente per $|y| < 1$ alla funzione $1/(1-y)$ mentre non converge per $|y| \geq 1$. Dunque la serie di partenza converge assolutamente per $|x| < (1-x)^2$, ovvero per $x < (3-\sqrt{5})/2$ e per $x > (3+\sqrt{5})/2$, alla funzione

$$\frac{1}{1-\frac{x}{1-2x+x^2}} - 1 = \frac{x}{1-3x+x^2},$$

mentre non converge al di fuori delle due semirette.

Esercizio 6 Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{x}{4^n}$:
(i) determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie converge assolutamente;
(ii) determinare il sottoinsieme di E in cui la serie converge totalmente;
(iii) calcolare la derivata della serie nei punti in cui questa è derivabile;
(iv) mostrare che la serie non converge totalmente in tutto E.

Risposta (i) La serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ grazie al criterio del confronto: infatti risulta

$$\left|\sin\frac{x}{4^n}\right| \leq \frac{|x|}{4^n}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{x}{4^n}$ è assolutamente convergente[1]

(ii) In ogni intervallo $|x| \leq r < \infty$ la serie converge totalmente, di nuovo grazie al criterio del confronto:

$$\left|\sin\frac{x}{4^n}\right| \leq \frac{|x|}{4^n} \leq \frac{r}{4^n}.$$

(iii) In tutto $\mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} \cos\frac{x}{4^n}$ delle derivate converge totalmente, e di conseguenza ha per somma la derivata della somma della serie.

(iv) Per ogni n il massimo su $\mathbb{R}$ di $|3^n \sin\frac{x}{4^n}|$ si raggiunge nei punti $x = 4^n k\pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, e vale 3^n.

Esercizio 7 Studiare la convergenza assoluta e quella totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sqrt{n}x}$.

Risposta Grazie al confronto asintotico con $\sum n^{-2}$, ad esempio, si ha convergenza assoluta per $x < 0$ e totale in ogni semiretta $]-\infty, r]$ con $r < 0$; non c'è convergenza totale in $]-\infty, 0[$ perché ogni addendo in tale semiretta ha estremo superiore uguale ad 1, e c'è divergenza in tutta la semiretta $[0, \infty[$.

Esercizio 8 Studiare la convergenza assoluta e quella totale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}$.

Risposta Convergenza innanzitutto per $x = 0$; poi, siccome $x^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\log x}$ per $x > 0$, valgono le stesse considerazioni dell'esercizio precedente, tranne per x che qui è sostituito da $\log x$: dunque convergenza assoluta in $[0, 1[$ e totale in $[0, r]$ per $0 < r < 1$.

[1] Nel testo adottato per il corso è proposto, all'Esercizio 41 (b) del Capitolo II, lo studio della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, ma poi lo svolgimento a p.584 è sbagliato.

Esercizio 9 Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n^2}:$$

(i) determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie converge;
(ii) determinare il sottoinsieme di E in cui la serie converge totalmente;
(iii) determinare il sottoinsieme di E in cui la serie risulta derivabile.

Risposta (i) Per ogni $x \in R$ la serie data è a termini positivi. Applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n x^{2n}}{n^2}} = 4x^2$$

vediamo che la serie converge per ogni x tcon $4x^2 < 1$, ovvero $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, e non converge quando $4^2 > 1$. Rimangono da considerare i casi $x = \pm\frac{1}{2}$. La serie diventa allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

e quindi converge. Conclusione: l'insieme E di convergenza è $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(ii) L'insieme di convergenza totale coincide con tutto E in quanto

$$\sup_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \left| \frac{x^{2n}4^n}{n^2} \right| = \max_{x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \frac{x^{2n}4^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

e, come abbiamo osservato,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

(iii) Per studiare la derivabilità della serie in E applichiamo il teorema di derivazione sotto il segno di serie. Studiamo quindi la serie ottenuta derivando termine a termine quella data, ovvero

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n 2n x^{2n-1}}{n^2}.$$

Questa converge totalmente e quindi uniformemente in ogni insieme $[-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta]$ con $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Infatti si ha
$$\max_{x\in[-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta]} \left| \frac{2nx^{2n-1}4^n}{n^2} \right| = \frac{2n4^n\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^{2n-1}}{n^2} = \frac{4n(1-2\delta)^{2n-1}}{n^2}$$

e la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n(1-2\delta)^{2n-1}}{n^2}$$

converge (si usi ad esempio il criterio della radice). Dal teorema di derivazione sotto il segno di serie deduciamo che la serie di partenza è derivabile in $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e che la sua derivata coincide proprio con la serie delle derivate (*). Osserviamo infine che la (*) non converge nei punti $x = \pm\frac{1}{2}$.

Esercizio 10 (i) Determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie $\sum n^{\log x}$ converge e il sottoinsieme di E in cui la convergenza è totale.

(ii) Servendosi di (i), determinare l'insieme E dei valori di x per i quali la serie $\sum x^{\log n}$ converge e il sottoinsieme di E in cui la convergenza è totale.

Risposta (i) L'insieme E è la semiretta dove $\log x < -1$, cioè $E =]0, 1/e[$. La domanda del testo sulla convergenza totale è stata formulata male: la formulazione corretta è con "i sottoinsiemi" al posto di "il sottoinsieme", e la risposta è: convergenza totale in ogni semiretta $x \leq \alpha$ oppure (*equivalentemente*!) in ogni semiretta $x < \alpha$ con $\alpha < 1/e$, perché $n^{\log x} \leq \sup_{x \leq \alpha} n^{\log x} = n^{\log \alpha}$. (Chi ha scritto che si ha convergenza totale in ogni *compatto* contenuto in E è andata/o più sul sicuro, ma ha perso qualcosa...)

(ii) Per $x > 0$ stesse risposte che per il punto (i), dal momento che

$$x^{\log n} = e^{\log x \log n} = n^{\log x} \quad \text{per } x > 0;$$

in più, convergenza anche per $x = 0$. Purtroppo in molti compiti si dà per scontato che le funzioni $x^{\log n}$ siano definite per $|x| < 1$, dimenticando che x^r per un generico r non naturale ha senso solo se $x \geq 0$ (ed anzi solo per $x > 0$ quando $r \leq 0$, che però non è il caso in questione). Il fatto è che tante/i hanno pensato alla serie geometrica, e in certi casi l'hanno pure scritto.