ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 29/11/2013

Esercizio 1 Calcolare i seguenti integrali doppi su rettangoli:

$$I_0 = \iint_R \sin(x+y)\,dx\,dy, \quad R = [0, \pi/2] \times [0, \pi];$$

$$I_1 = \iint_R (1+4xy)\,dxdy, \quad R = [1,3] \times [0,1];$$

$$I_2 = \iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dxdy, \quad R = [0,1] \times [-3,3];$$

$$I_3 = \iint_R \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\,dxdy, \quad R = [1,4] \times [1,2];$$

Risposta Per il calcolo di tutti gli integrali doppi di questo esercizio, dal momento che i domini di integrazione sono rettangoli, si possono applicare le formule di riduzione sia procedendo prima in y e poi in x che viceversa. Mostriamo entrambi i procedimenti soltanto per il primo integrale:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi} \sin(x+y)dy = \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x+y)|_{y=0}^{y=\pi} \right] dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x+\pi) + \cos(x) \right] dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = 2$$

oppure

$$I_0 = \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)dx = \int_0^{\pi} \left[-\cos(x+y)|_{x=0}^{x=\pi/2} \right] dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \left[-\cos(y+\pi/2) + \cos(y) \right] dy = \int_0^{\pi} \left[-\sin(y) + \cos(y) \right] dy = 2.$$

Passiamo agli altri integrali.

$$I_1 = \int_1^3 dx \int_0^1 (1+4xy)\,dy = \int_1^3 [y + 2xy^2]_0^1\,dx = \int_1^3 (1+2x)\,dx = 10.$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \int_{-3}^3 y^2\,dy = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-3}^3 = 9\log 2.$$

$$I_3 = \int_1^4 dx \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\,dy = \int_1^4 \left[x\log y + \frac{y^2}{2x}\right]_1^2 dx = \int_1^4 \left(x\log 2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\log 2 + 2\log x - \frac{1}{2}\log x\right]_1^4 = 8\log 2 - \frac{1}{2}\log 2 + 4\log 2 - \log 2 = \frac{21}{2}\log 2$$

Esercizio 2 Disegnare l'insieme piano

$$S: \ 3 \le x \le 5, \ \frac{1}{x} \le y \le x$$

e calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_S \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy.$$

Risposta L'integrale doppio si calcola secondo la formula di riduzione

$$I = \iint_S \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy = \int_3^5 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy =$$

$$= \int_3^5 x^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=3}^{x=5} = 128$$

Il valore trovato è il volume del solido costruito su S e coperto dal grafico della funzione $z = x^2/y^2$.

Esercizio 3 Siano $f(x,y) = (2y+1)\cos(x+y)$, $D = \{(x,y) \,|\, -1 \le y \le 1, \quad y^2 \le x \le 1\}$. Calcolare

$$I = \int_D f(x,y)\, dxdy.$$

Risposta D è un dominio normale rispetto all'asse y, per cui

$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} (2y+1)\cos(x+y)\, dx = \int_{-1}^{1} (2y+1)[\sin(1+y) - \sin(y+y^2)]\, dy = \cdots = -2 - 2\cos 2 + 2\sin 2.$$

Esercizio 4 Sia $D = \{2x^2 \le y \le x^2+1\}$:

(i) disegnare D e calcolarne l'area $A(D)$,

(ii) calcolare le coordinate del baricentro

$$x_G = \frac{1}{A(D)} \iint_D x\, dx\, dy, \quad y_G = \frac{1}{A(D)} \iint_D y\, dx\, dy,$$

(iii) calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse y

$$I = \iint_D x^2\, dx\, dy.$$

Risposta Innanzitutto,

$$A(D) = \iint_D 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy = \int_{-1}^{1} (1-x^2) dx = \frac{4}{3}$$

$$\iint_D x\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} x\, dy = \int_{-1}^{1} x(1-x^2) dx = 0$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} y\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-3x^4+2x^2)\,dx = \frac{16}{15}.$$

Da qui seguono le coordinate del baricentro

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{4}{5}.$$

Infine

$$I = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2}^{1+x^2} x^2\,dy = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \frac{4}{15}.$$

Esercizio 5 Calcolare

$$I = \iint_D xy\,dxdy$$

dove D è il dominio compreso tra le curve $x-y-1=0$ e $2x-y^2+6=0$.

Risposta D è normale rispetto a entrambi gli assi, ma scegliere l'uno o l'altro asse di riferimento incide abbastanza sulla facilità di calcolo di I. Infatti prendendo D come dominio normale rispetto all'asse y otteniamo:

$$I = \int_{-2}^{4} y\,dy \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} x\,dx = \int_{-2}^{4} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+\frac{2y^3}{3}-4y^2\right]_{-2}^{4} = 36.$$

Invece prendendo D come dominio normale rispetto all'asse x dovremmo fare il calcolo, (ancora) più noioso, di

$$\int_{-3}^{-1} x\,dx \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} y\,dy + \int_{-1}^{5} x\,dx \int_{-1}^{\sqrt{2x+6}} y\,dy.$$

Esercizio 6 Calcolare

$$I = \iint_T \sin y^2\,dxdy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

Risposta Di nuovo abbiamo un dominio normale rispetto a entrambi gli assi. Stavolta, però, prenderlo normale rispetto all'asse x ci farebbe andare a sbattere sull'integrale di una funzione che non è derivata di una funzione elementare:

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 \sin y^2\,dy.$$

Prendendo invece D normale rispetto all'asse y otteniamo subito

$$I = \int_0^1 \sin y^2\,dy \int_0^y dy = \int_0^1 y\sin y^2\,dy = \frac{1}{2}(1-\cos 1).$$