ANALISI VETTORIALE — COMPITO PER CASA DEL 6/12/2013

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\iint_S 2y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove S è l'intersezione del cerchio del piano di centro l'origine e raggio 1 con il semipiano dato da $y \leq -x$.

Risposta In questo dominio conviene usare il passaggio in coordinate polari $\Phi : x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin\theta$, per cui $S = \Phi([\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi] \times [0,1])$. Quindi

$$\iint_S 2y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^1 2\rho\sin(\theta)\rho\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \sin(\theta)\,d\theta \int_0^1 2\rho^3\,d\rho = -\sqrt{2}2\frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 2 Dato $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0, x \geq 0\}$, calcolare l'integrale

$$\iint_S xye^{x^2}\,dx\,dy.$$

Risposta Trattandosi di una parte di corona circolare conviene usare nuovamente il passaggio Φ in coordinate polari . In questo caso $S = \Phi([0, \frac{\pi}{2}] \times [1,2])$, per cui

$$\iint_S xye^{x^2}dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \rho^3 \sin(\theta)\cos(\theta)e^{\rho^2\cos^2(\theta)}\,d\theta\,d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho\left[-\frac{1}{2}e^{\rho^2\cos^2(\theta)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 \rho(e^{\rho^2}-1)\,d\rho = \frac{1}{4}(e^4-e-3).$$

Esercizio 3 Dato $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x+y \leq 2, 0 \leq x-y \leq 4\}$, calcolare l'integrale

$$\iint_S \frac{x-2y}{(x+y)^2}\,dxdy.$$

Risposta In questo caso è utile considerare il cambio di variabile lineare $u = x+y$, $v = x-y$, la cui inversa Φ è data da

$$x = \frac{u+v}{2},\ y = \frac{u-v}{2}.$$

Dunque $S = \Phi([1,2] \times [0,4])$, e

$$|J_\Phi(u,v)| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}.$$

Ne segue

$$\iint_S \frac{x-2y}{(x+y)^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^4 \int_1^2 \frac{3v-u}{2u^2}\,dudv$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \left[-\frac{3v}{u} - \log(|u|)\right]_1^2 dv = \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{3v}{2} - \log(2)dv = 3-\log(2).$$

Esercizio 4 Calcolare l'area e il baricentro dell'insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \le y \le 2x^2,\, x \le y \le 4x\}$.

Risposta Il dominio dato suggerisce un cambio di variabile tale che $u = \frac{y}{x^2}$, $v = \frac{y}{x}$. Si tratta di un'applicazione ben definita e invertibile, con inversa $\Phi : x = \frac{v}{u}$, $y = \frac{v^2}{u}$, differenziabile, in $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$. Dunque $S = \Phi([1,2]\times[1,4])$, e

$$|J_\Phi(u,v)| = \left|\det \begin{pmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ -\frac{v^2}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{pmatrix}\right| = \frac{v^2}{u^3}.$$

Ne segue che

$$|S| = \iint_S 1\,dxdy = \int_1^2\int_1^4 |J_\phi(u,v)|\,dvdu = \int_1^2\int_1^4 \frac{v^2}{u^3}\,dvdu$$

$$= \frac{-1}{6}[v^3]_1^4[u^{-2}]_1^2 = \frac{1}{8}(4^3-1),$$

$$x_b = \frac{1}{|S|}\iint_S x\,dxdy = \frac{1}{|S|}\int_1^2\int_1^4 \frac{v}{u}\frac{v^2}{u^3}\,dvdu$$

$$= \frac{1}{|S|}\frac{-1}{12}[v^4]_1^4[u^{-3}]_1^2 = \frac{1}{|S|}\frac{7}{8}\frac{1}{12}(4^4-1),$$

$$y_b = \frac{1}{|S|}\iint_S y\,dxdy = \frac{1}{|S|}\int_1^2\int_1^4 \frac{v^2}{u}\frac{v^2}{u^3}\,dvdu$$

$$= \frac{1}{|S|}\frac{-1}{15}[v^5]_1^4[u^{-3}]_1^2 = \frac{1}{|S|}\frac{7}{8}\frac{1}{15}(4^5-1).$$

Esercizio 5 Sia E l'insieme del piano (x,y) determinato dalle disuguaglianze

$$x^2 \le y \le 2x^2, \quad y^2 \le x \le 2y^2.$$

Calcolare, servendosi di un opportuno cambiamento di coordinate, l'integrale doppio

$$\iint_E \frac{e^{y/x^2}}{x^2y^2}\,dx\,dy.$$

Risposta La regione E, delimitata da quattro archi di parabole, puó essere descritta anche al modo seguente:

$$1 \le \frac{y}{x^2} \le 2, \quad 1 \le \frac{x}{y^2} \le 2,$$

da cui viene naturalmente suggerito il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} = u, \\ \\ \dfrac{x}{y^2} = v, \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 2, \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

da cui, ricavando x e y, si ha

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{u^2 v}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{uv^2}}.$$

La matrice jacobiana è pertanto la seguente

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3u^{5/3}\sqrt[3]{v}} & -\frac{1}{3u^{2/3}v^{4/3}} \\ -\frac{1}{3u^{4/3}v^{2/3}} & -\frac{2}{3\sqrt[3]{u}v^{5/3}} \end{pmatrix}$$

e quindi il suo determinante vale

$$J(u, v) = \frac{1}{3u^2v^2}$$

Dalla regola del cambiamento delle coordinate negli integrali doppi segue pertanto

$$\iint_E \frac{e^{y/x^2}}{x^2y^2}\, dx\, dy = \int_1^2 du \int_1^2 u^2v^2e^u \frac{1}{3u^2v^2}\, dv =$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^2 e^u du = \frac{e^2 - e}{3}.$$

Esercizio 6 Sia E l'insieme del piano (x, y) delimitato dalle seguenti quattro rette

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y + x = 2, \quad y + 2x = 2.$$

Calcolare, servendosi di un opportuno cambiamento di coordinate, l'integrale doppio

$$\iint_E \frac{\log(x)}{y^3}\, dx\, dy.$$

Risposta Le condizioni che determinano l'insieme E possono essere anche scritte nella forma seguente

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, \quad -2 \leq \frac{y-2}{x} \leq -1$$

che suggerisce il cambio di coordinate

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{2-y}{x},$$

e dunque

$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 2, \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

Da tale scelta si ricavano

$$x = \frac{2}{u+v}, \quad y = \frac{2u}{u+v}$$

e quindi

$$J(u,v) = \frac{4}{(u+v)^3}$$

$$\iint_E \frac{\log(x)}{y^3}\,dx\,dy = \int_1^2 du \int_1^2 \log\left(\frac{2}{u+v}\right)\frac{(u+v)^3}{2^3u^3}\frac{4}{(u+v)^3}dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 \log\left(\frac{2}{u+v}\right)\frac{1}{u^3}dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^3}\int_1^2 (\log(2) - \log(u+v))\,dv =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(u+1)\log(u+1) - (u+2)\log(u+2) + 1 + \log(2)}{u^3}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} + \log\left(\frac{16\,.\,2^{5/8}}{27\,.\,3^{3/8}}\right)\right).$$

Esercizio 7 Sia E l'insieme del piano (x,y) delimitato dalle seguenti quattro curve

$$y + 2x = 0, \quad y + 2x = 1, \quad y - x^2 = 0, \quad y - x^2 = 1.$$

Calcolare, servendosi di un opportuno cambiamento di coordinate, l'integrale doppio

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy.$$

Risposta Indicate le limitazioni che definiscono E come

$$0 \le y + 2x \le 1, \quad 0 \le y - x^2 \le 1$$

si riconosce il cambio di coordinate collegato

$$\begin{cases} u = y + 2x, \\ v = y - x^2, \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} 0 \le u \le 1, \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$$

che produce

$$\boxed{1} : \begin{cases} y = 2 + u - 2\sqrt{1+u-v}, \\ x = -1 + \sqrt{1+u-v} \end{cases} \qquad \boxed{2} : \begin{cases} y = 2 + u + 2\sqrt{1+u-v}, \\ x = -1 - \sqrt{1+u-v} \end{cases}$$

La prima coppia di funzioni $\boxed{1}$: stabilisce un cambiamento di coordinate tra E_-, la parte più bassa di E, e il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ del piano (u,v).

La seconda coppia di funzioni $\boxed{2}$: stabilisce un cambiamento di coordinate tra E_+, la parte più alta di E, e il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ del piano (u,v).

Le due matrici jacobiane delle trasformazioni $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ sono

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} & -\frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} \\ & \\ 1-\frac{1}{\sqrt{u-v+1}} & \frac{1}{\sqrt{u-v+1}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} & +\frac{1}{2\sqrt{u-v+1}} \\ & \\ 1+\frac{1}{\sqrt{u-v+1}} & -\frac{1}{\sqrt{u-v+1}} \end{pmatrix}$$

Il modulo del loro determinante è lo stesso e vale

$$|J(u,v)| = \frac{1}{2\sqrt{u-v+1}}$$

La formula del cambiamento delle coordinate negli integrali doppi fornisce pertanto, indicate con E_- ed E_+ la parte inferiore e la parte superiore di E

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy = \iint_{E_-} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{E_+} (x+y)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^1 du \int_0^1 \left(1+u-\sqrt{1+u-v}\right) \frac{1}{2\sqrt{1+u-v}}\,dv +$$

$$+\int_0^1 du \int_0^1 \left(1+u+\sqrt{1+u-v}\right) \frac{1}{2\sqrt{1+u-v}}\,dv =$$

da cui, per linearità,

$$= \int_0^1 du \int_0^1 \frac{1+u}{\sqrt{1+u-v}}\,dv = \frac{4}{15}\left(12\sqrt{2}-11\right).$$