

ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 13/12/2013

Esercizio 1 Calcolare

$$I = \int_E (xy + z^2) dx dy dz, \quad E =]0, 1[\times]0, 2[\times]0, 3[.$$

Esercizio 2 Calcolare

$$I = \int_E xy^2 z^3 dx dy dz, \quad E = \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x, 0 < z < xy\}.$$

Esercizio 3 Sia

$$E = \{(x, y, z) \mid x, y, z > 0, 1/4 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Calcolare

$$I = \int_E xyz dx dy dz.$$

Esercizio 4 Calcolare

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2 < R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - A)^2}}, \quad A > R.$$

(Il prodotto di I per la costante di gravitazione universale è il **potenziale newtoniano** generato in $(0, 0, A)$ da una massa di densità costante $= 1$ distribuita in una palla di raggio R e centro l'origine.)

Esercizio 5 Descrivere il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 definito dalle disuguaglianze $0 < x < 2, 0 < y < \sqrt{2x - x^2}, 0 < z < 2$ e calcolare

$$I = \int_E z^3 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

Esercizio 6 Calcolare

$$I = \int_E (x^2 + y) dx dy, \quad E = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -x \leq y \leq x\}.$$

Esercizio 7 Siano $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e $g(x, y) = \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

(i) Studiare per quali α f è dotata di integrale improprio convergente su tutto \mathbb{R}^2 ; mostrare che $g(x, y)$ è dotata di integrale improprio convergente su tutto \mathbb{R}^2 ;

(ii) calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy; \quad \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy;$$

passando al limite di integrali di Riemann sia su quadrati che su cerchi;

(iii) calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Esercizio 8 Determinare se sono conservativi nei loro domini i seguenti campi, e nei casi in cui la risposta è affermativa calcolare i rispettivi potenziali:

$$\vec{F}_1 = (2x^2, 3y^2), \quad \vec{F}_2 = (y^2, x^2, x^2 + y^2 + z^2), \quad \vec{F}_3 = (e^x + y, e^y + x), \quad \vec{F}_4 = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2} \right).$$

Esercizio 9 Determinare se il campo

$$\vec{F} = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2} \right)$$

è conservativo nei semipiani

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x < 0, \quad y < 0$$

e nei casi in cui la risposta è affermativa calcolare i rispettivi potenziali.