ANALISI VETTORIALE — COMPITO IN CLASSE DEL 13/12/2013

Esercizio 1 Calcolare

$$I = \int_E (xy + z^2)\, dxdydz, \quad E =]0,1[\times]0,2[\times]0,3[.$$

Risposta

$$I = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[xyz + z^3/3\right]_0^3 = \cdots = 21.$$

Esercizio 2 Calcolare

$$I = \int_E xy^2z^3\, dxdydz, \quad E = \{(x,y,z)\,|\, 0 < x < 1,\, 0 < y < x,\, 0 < z < xy\}.$$

Risposta

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2z^3\, dz = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5y^6}{4}\, dy = \int_0^1 \frac{x^{12}}{28}\, dx = \frac{1}{13\cdot 28}.$$

Esercizio 3 Sia

$$E = \{(x,y,z)\,|\, x,y,z > 0,\, 1/4 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Calcolare

$$I = \int_E xyz\, dxdydz.$$

Risposta Coordinate sferiche: $\Lambda(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$;

$$I = \int_{\Lambda^{-1}(E)} r\cos\varphi\sin\vartheta \cdot r\sin\varphi\sin\vartheta \cdot r\cos\vartheta \cdot r^2\sin\vartheta\, drd\varphi d\vartheta$$

$$= \int_{1/2}^1 r^5\, dr \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\sin^3\vartheta\, d\vartheta = \left[\frac{r^6}{6}\right]_{1/2}^1 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{63}{48\cdot 64}.$$

Esercizio 4 Calcolare

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2<R^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-A)^2}}, \quad A > R.$$

(Il prodotto di I per la costante di gravitazione universale è il **potenziale newtoniano** generato in $(0,0,A)$ da una massa di densità costante $= 1$ distribuita in una palla di raggio R e centro l'origine.)

Risposta Coordinate sferiche:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 + A^2 - 2Ar\cos\vartheta}}\, d\vartheta = \frac{2\pi}{A}\int_0^R r\left[\sqrt{r^2 + A^2 - 2Ar\cos\vartheta}\right]_0^\pi dr$$

$$= \frac{2\pi}{A}\int_0^R r[A + r - (A - r)]\, dr = \frac{4\pi R^3}{3A}.$$

Esercizio 5 Descrivere il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito dalle disuguaglianze $0 < x < 2$, $0 < y < \sqrt{2x - x^2}$, $0 < z < 2$ e calcolare

$$I = \int_E z^3\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz.$$

Risposta E è il prodotto cartesiano tra il semicerchio $(x-1)^2 + y^2 < 1$, $y > 0$, ovvero $x^2 + y^2 = r^2 < 2\cos\varphi$, $0 < \varphi < \pi/2$, e il segmento $]0,2[$;

$$I = \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\, dr = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{32}{3}\left[s - \frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{64}{9}.$$

Esercizio 6 Calcolare

$$I = \int_E (x^2 + y)\, dxdy, \quad E = \{(x,y) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ -x \le y \le x\}.$$

Risposta Coordinate polari $1 \le r \le 2$, $-\pi/4 \le \vartheta \le \pi/4$; $I = 15\pi/16 + 15/8$. Attenzione: per $3\pi/4 \le \vartheta \le 5\pi/4$ non è vero che $-x \le y \le x$, bensı che $x \le y \le -x$!

Esercizio 7 Sia $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

(i) Mostrare che f è dotata di integrale improprio convergente su tutto $\mathbb{R}^2$;

(ii) calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$$

passando al limite di integrali di Riemann sia su quadrati che su cerchi;

(iii) calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Risposta (i) Ovvio: ogni esponenziale — funzione regolarissima in tutti i limitati — con esponente uguale all'opposto di una potenza positiva della distanza r dall'origine tende a 0 per $r \to \infty$ più rapidamente di $r^{-\alpha}$, o se si preferisce di $(1 + r^\alpha)^{-1}$, quale che sia $\alpha > 0$.

(*ii*) Passando a coordinate polari si vede che

$$\int_{x^2+y^2<R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi(1-e^{-R^2}) \to \pi \quad \text{per } R \to \infty,$$

e questo è anche un'altra risposta, ben più precisa della precedente, alla domanda di (*i*); d'altra parte, ogni quadrato di lato $2R$ contiene un cerchio di raggio R ed è contenuto in un cerchio di raggio $\sqrt{2}R$, per cui

$$\int_{x^2+y^2<R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \le \int_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \le \int_{x^2+y^2<2R^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

e se ne deduce che

$$\int_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R e^{-(x^2+y^2)}\,dy = \int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx \int_{-R}^R e^{-y^2}\,dy$$

tende a π per $R \to \infty$.

(*iii*) L'ultimo membro delle precedenti identità vale

$$\left(\int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

e quindi la sua radice quadrata tende a $\sqrt{\pi}$ per $R \to \infty$, da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Esercizio 8 Determinare se sono conservativi nei loro domini i seguenti campi, e nei casi in cui la risposta è affermativa calcolare i rispettivi potenziali:

$$\overrightarrow{F}_1 = (2x^2, 3y^2), \quad \overrightarrow{F}_2 = (y^2,\, x^2,\, x^2+y^2+z^2), \quad \overrightarrow{F}_3 = (e^x+y,\ e^y+x), \quad \overrightarrow{F}_4 = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right).$$

Risposta Nel suo dominio $\mathbb{R}^2$ campo $\overrightarrow{F}_1$ è ovviamente il gradiente delle funzioni

$$\frac{2}{3}x^3 + y^3 + K.$$

Nel suo dominio $\mathbb{R}^2$ il campo $\overrightarrow{F}_2 = (F_{21}, F_{22}, F_{23})$ non è conservativo perché non ha rotore nullo:

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{22} = 2x \neq \frac{\partial}{\partial y}F_{21} = 2y.$$

Nel suo dominio $\mathbb{R}^2$ il campo $\overrightarrow{F}_3$ ha rotore

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^x+y & e^y+x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi è un gradiente. Un suo potenziale si ottiene così: si cercano le primitive $V(x,y)$ della $e^x + y$ rispetto a x, ovvero

$$V(x,y) = e^x + xy + c(y),$$

e si sceglie la $c(y)$ in modo che $V_y = e^y + x$, da cui $c'(y) = e^y$ e quindi $c(y) = e^y + K$. Le V richieste sono dunque le $e^x + xy + e^y + K$.

Nel suo dominio $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ il campo $\overrightarrow{F}_4$ è radiale, quindi conservativo, con potenziali

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + K.$$

Esercizio 9 Determinare se il campo

$$\overrightarrow{F} = \left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}\right)$$

è conservativo nei semipiani

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x < 0, \quad y < 0$$

e nei casi in cui la risposta è affermativa calcolare i rispettivi potenziali.

Risposta Metodo dell'integrazione indefinita:

- per $x > 0$ abbiamo

  $$\int \frac{x}{r^2}\,dy = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x}\frac{1}{1+y^2/x^2}\,dy = \arctan\frac{y}{x} + \varphi_1(x)$$

  e siccome

  $$\frac{d}{dx}\arctan\frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+y^2/x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2}$$

  ne ricaviamo $\varphi_1(x) = K_1$, da cui i potenziali

  $$U_1(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + K_1;$$

- per $y > 0$ abbiamo

  $$\int \frac{-y}{r^2}\,dx = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = \int \frac{-1}{y}\frac{1}{1+x^2/y^2}\,dx = \operatorname{arccot}\frac{x}{y} + \psi_1(y)$$

  e siccome

  $$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot}\frac{x}{y} = \frac{x}{y^2}\frac{1}{1+x^2/y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}$$

  ne ricaviamo $\psi_1(y) = K_2$, da cui i potenziali

  $$U_2(x,y) = \operatorname{arccot}\frac{x}{y} + K_2;$$

- analogamente, per $x < 0$ abbiamo i potenziali

  $$U_3(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + K_3$$

  e per $y < 0$ i potenziali

  $$U_4(x,y) = \operatorname{arccot}\frac{x}{y} + K_4.$$