ANALISI VETTORIALE — COMPITO PER LE VACANZE DI FINE D'ANNO

Esercizio 1 Sia $\mathbf{r}(t)$ la curva regolare a tratti

$$x = t^2,\ y = t^3, \quad t \in [0,1] \quad e \quad x = t^3,\ y = t^2, \quad t \in [1,2].$$

- Calcolare la lunghezza di $\mathbf{r}$,
- calcolare, dove esistono, i versori tangenti $\overrightarrow{\tau}(t)$.

Esercizio 2 Sia $\mathbf{r}(t)$ la curva regolare a tratti

$$x = \cos(t),\ \ y = \sin(t),\ \ z = \begin{cases} t & t \in [0,\pi) \\ 2t & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} .$$

(i) Calcolare la lunghezza di $\mathbf{r}$,
(ii) determinare la funzione $s(t)$ ascissa curvilinea su $\mathbf{r}$,
(iii) determinare i punti di non derivabilità di $s(t)$.

Esercizio 3 Assegnato il campo $\overrightarrow{F} = (2x^2, 3y^2)$:

- determinare il lavoro di F lungo il segmento dall'origine al punto $(1, 2)$,
- determinare il lavoro di F lungo la poligonale

$$(0,0) \to (1,0) \to (1,2).$$

Esercizio 4 Assegnato il campo

$$\overrightarrow{F} = (y^2,\ x^2,\ x^2 + y^2 + z^2) :$$

- determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto $(1, 2, 3)$,
- detto $L(a, b, c)$ il lavoro di F lungo il segmento dall'origine al punto (a, b, c), determinare il gradiente della funzione $L(a, b, c)$,
- servirsi del punto precedente per verificare che $\overrightarrow{F}$ non è conservativo.

Esercizio 5 Assegnato il campo

$$\overrightarrow{F} = (e^x + y,\ e^y + x)$$

- determinare un suo potenziale con la tecnica dell'aperto stellato,
- determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ sui segmenti da $(\rho, 0)$ a $(0, \rho)$ al variare di $\rho \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6 Dato il campo $\overrightarrow{F} = \{\cos(x+y), \sin(x+y)\}$ e detti $\mathcal{C}_r$ i cerchi di centro l'origine e raggio r, determinare

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \oint_{\partial\mathcal{C}_r} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

Esercizio 7 Assegnate due funzioni continue f e g, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \{(f(x)+y)dx + (g(y)-3x)dy\}$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa nel verso antiorario.

Esercizio 8 Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\mathcal{C}} \left\{(2xy-5)\, dx + (x^2+3y^2)\, dy\right\}$$

essendo $\mathcal{C}$

- il segmento da $(-1,0)$ a $(1,0)$, oppure
- l'arco di parabola $y = x^2 - 1$ percorso da $(-1,0)$ a $(1,0)$.

Esercizio 9 Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} - 1, \cos y - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}\right)$$

lungo l'arco di parabola $y = x^2 - 4x + 3$ dal punto $(1,0)$ al punto $(4,3)$.

Esercizio 10 Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{v} = \left\{\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

calcolare il lavoro relativo

- alla circonferenza $\mathcal{G}$ di centro $(1,3)$ e raggio $r = 1$,
- alla circonferenza $\mathcal{P}$ di centro $(1,3)$ e raggio $r = 4$.
- alla curva $C : x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ t \in [0, k\pi],\ k > 0$.

Esercizio 11 Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{w} = \left\{\frac{-y}{r^n}, \frac{x}{r^n}\right\}$$

calcolare il lavoro

$$\int_C \overrightarrow{w} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

essendo C la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$.

Esercizio 12 Calcolare il flusso del campo di forze

$$F(x,y) = (x^3y, -x^2y^2)$$

uscente dalla frontiera del dominio D intersezione del cerchio di centro $(0,-3)$ e raggio 1 col semipiano $y \geq -3$.

Esercizio 13 Calcolare il flusso del campo $F = (x^2, xy)$ uscente dal dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x - 3y \leq 2,\ 0 \leq x - y \leq 1\}$.

Esercizio 14 Dato il dominio D di $\mathbb{R}^3$ costituito dai punti che si trovano nel quarto di spazio $y \geq 0$, $z \geq 0$ e tra le sfere di centro l'origine e raggio 1 e 2, calcolare

$$\iiint_D \frac{z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dxdydz.$$

Esercizio 15 Dato il campo $F = (\frac{y}{1+xy} - y^2, \frac{x}{1+xy} - 2xy)$, calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = t^2, \;\; y(t) = t, \quad t \in [1,2],$$

percorsa nel verso delle t crescenti.

Esercizio 16 Sia E il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$E := \left\{ \; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,, \quad \text{tali che} \quad x^2+y^2 \leq 1 \,, \quad -\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \; \right\}.$$

Calcolare il volume di E.

Esercizio 17 Dato il campo vettoriale

$$F := \left(\frac{3x^2}{4+x^3+y^2}, \frac{2y}{4+x^3+y^2} \right)$$

calcolarne il lavoro sull' arco di curva

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 3t^3 + 2 \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$.

Esercizio 18 Calcolare il lavoro compiuto dal campo

$$(-yx^{-2}e^{-(y/x)}, x^{-1}e^{-(y/x)})$$

lungo la curva sostenuta dalla semicirconferenza

$$S : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, \;\; y \geq x$$

ed orientata in senso antiorario.