ANALISI VETTORIALE — COMPITO PER LE VACANZE DI FINE D'ANNO

Esercizio 1 Sia $\mathbf{r}(t)$ la curva regolare a tratti

$$x = t^2,\ y = t^3, \quad t \in [0,1] \quad e \quad x = t^3,\ y = t^2, \quad t \in [1,2].$$

- Calcolare la lunghezza di $\mathbf{r}$,
- calcolare, dove esistono, i versori tangenti $\vec{\tau}(t)$.

Risposta La curva $\mathbf{r}$ è *regolare a tratti* per via di quanto succede della sua rappresentazione parametrica nel punto $t = 1$: pur riuscendo

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = \lim_{t\to 1^+} x(t), \quad \lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{t\to 1^+} y(t)$$

si ha

$$\lim_{t\to 1^-} x'(t) = 2 \neq \lim_{t\to 1^+} x'(t) = 3, \quad \lim_{t\to 1^-} y'(t) = 3 \neq \lim_{t\to 1^+} y'(t) = 2.$$

La lunghezza $\mathcal{L}$ si calcola per ciascun tratto

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt + \int_1^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\,dt =$$

$$= \int_0^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt = \frac{1}{18}\,\frac{2}{3}\sqrt{4+9t^2}^3\Big|_0^2 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$

I versori tangenti esistono in tutti i punti di $\mathbf{r}$ meno che nel punto $(1,1)$ corrispondente a $t = 1$: si ha

$$\vec{\tau}(t) = \pm\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\right).$$

Le espressioni di $x'(t)$ e $y'(t)$ sono naturalmente diverse a seconda che riesca $t \in [0,1)$ oppure $t \in (1,2]$.

Esercizio 2 Sia $\mathbf{r}(t)$ la curva regolare a tratti

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = \begin{cases} t & t \in [0,\pi) \\ 2t & t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

(i) Calcolare la lunghezza di $\mathbf{r}$,
(ii) determinare la funzione $s(t)$ ascissa curvilinea su $\mathbf{r}$,
(iii) determinare i punti di non derivabilità di $s(t)$.

Risposta La curva $\mathbf{r}$ è composta di due due eliche separate:

- la prima $x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = t, \quad t \in [0,\pi]$, parte dal punto $(1,0,0)$ e termina nel punto $(-1,0,\pi)$
- la seconda $x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = 2t, \quad t \in [\pi, 2\pi]$, parte dal punto $(-1,0,2\pi)$ e termina nel punto $(1,0,4\pi)$

La lunghezza totale, somma delle lunghezze delle due parti, è quindi

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi} \sqrt{1+1}dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1+4}dt = \pi\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$$

L'ascissa curvilinea è

$$s(t) = \begin{cases} t\sqrt{2} & se \quad t \in [0,\pi] \\ \pi\sqrt{2} + (t-\pi)\sqrt{5} & se \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

La funzione $s(t)$ è derivabile in tutto $[0,2\pi]$ privato del punto π: infatti

$$s'(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & se \quad t \in [0,\pi) \\ \sqrt{5} & se \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Esercizio 3 Assegnato il campo $\overrightarrow{F} = (2x^2, 3y^2)$:

- determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto $(1,2)$,
- determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo la poligonale

$$(0,0) \to (1,0) \to (1,2).$$

Risposta Il lavoro del campo $\overrightarrow{F}$ è, per definizione,

$$\int_S \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

dove S è il segmento $(0,0),(1,2) : x = t, y = 2t,\ t \in [0,1]$, e

$$\overrightarrow{\tau} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Si ha quindi

$$\int_S \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 (2t^2 + 6(2t)^2)dt = \frac{26}{3}.$$

Il lavoro lungo i due segmenti della poligonale $(0,0) \to (1,0) \to (1,2)$ è

$$\int_0^1 2x^2\, dx + \int_0^2 3y^2 dy = \frac{2}{3} + 8 = \frac{26}{3}$$

Come si è osservato già con l'Es.8 del 13/12, il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo, con potenziale dato da

$$U(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + y^3.$$

I due lavori del campo $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento $(0,0),(1,2)$ e lungo la poligonale $(0,0) \to (1,0) \to (1,2)$ quindi coincidono tra loro e coincidono con l'incremento di U tra gli estremi del segmento e della poligonale.

Esercizio 4 Assegnato il campo

$$\overrightarrow{F} = (y^2,\, x^2,\, x^2 + y^2 + z^2) :$$

- determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto $(1, 2, 3)$,
- detto $L(a, b, c)$ il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto (a, b, c), determinare il gradiente della funzione $L(a, b, c)$,
- servirsi del punto precedente per verificare che $\overrightarrow{F}$ non è conservativo.

Risposta Una rappresentazione parametrica del segmento S è

$$x = t,\ y = 2t,\ z = 3t,\ \ t \in [0, 1];$$

il versore tangente è

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,\ 2,\ 3)$$

da cui

$$\int_S \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \int_0^1 \left((2t)^2 \,.\, 1 + t^2 \,.\, 2 + (14t^2) \,.\, 3\right) dt =$$

$$= \int_0^1 48t^2\, dt = \frac{48}{3} = 16.$$

Il lavoro $L(a, b, c)$ di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento dall'origine al punto (a, b, c) si calcola in modo analogo:

$$x = at,\ y = bt,\ z = ct,\ \ t \in [0, 1];$$

il versore tangente è

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\{a,\ b,\ c\}$$

da cui

$$L(a, b, c) = \int_0^1 \left((bt)^2 \,.\, a + (at)^2 \,.\, b + (a^2 + b^2 + c^2)t^2 \,.\, c\right)\, dt =$$

$$= \frac{a^2\, b + b^2\, a + (a^2 + b^2 + c^2)\, c}{3}$$

Il gradiente $\nabla\, L(a, b, c)$ della $L(a, b, c)$ è pertanto

$$\left(\frac{\partial L}{\partial a}, \frac{\partial L}{\partial b}, \frac{\partial L}{\partial c},\right) = \left(\frac{2a(b + c) + b^2}{3}, \frac{2b(a + c) + a^2}{3}, \frac{a^2 + b^2 + 3c^2}{3}\right),$$

vettore che non coincide con $\overrightarrow{F}$ calcolato in (a, b, c). In altri termini, $L(a, b, c)$ non è un potenziale per $\overrightarrow{F}$, e questo sarebbe un modo — molto lungo — per constatare che $\overrightarrow{F}$ non è conservativo: questo peraltro l'avevamo già visto con l'Es.8 del 13/12, semplicemente constatando che il campo $\overrightarrow{F}$ non ha rotore nullo, dal momento che

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = 2x \neq \frac{\partial}{\partial y} F_1 = 2y.$$

Esercizio 5 Assegnato il campo

$$\overrightarrow{F} = (e^x + y,\ e^y + x)$$

- determinare un suo potenziale con la tecnica dell'aperto stellato,
- determinare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ sui segmenti da $(\rho, 0)$ a $(0, \rho)$ al variare di $\rho \in \mathbb{R}$.

Risposta Nell'Es.8 del 13/12 si è visto che in $\mathbb{R}^2$ il campo, essendo irrazionale, è conservativo, e si è costruito un suo potenziale con la tecnica dell'integrazione indefinita. Procediamo qui invece con la tecnica dell'aperto stellato, calcolando il lavoro del campo lungo il segmento $[0, 1] \ni t \mapsto (tx, ty)$ dall'origine al punto (x, y):

$$V(x, y) = \int_0^1 \left\{(e^{xt} + yt)x + (e^{yt} + xt)y\right\} dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{(e^{xt})' + (e^{yt})' + xy(t^2)'\right\} dt = e^x - 1 + e^y - 1 + xy.$$

Il lavoro richiesto sui segmenti da $(\rho, 0)$ a $(0, \rho)$ corrisponde, naturalmente a

$$V(0, \rho) - V(\rho, 0) = 0.$$

Esercizio 6 Dato il campo $\overrightarrow{F} = \{\cos(x + y), \sin(x + y)\}$ e detti $\mathcal{C}_r$ i cerchi di centro l'origine e raggio r, determinare

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \oint_{\partial\mathcal{C}_r} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

Risposta Dalla formula di Stokes si ha

$$\oint_{\partial\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \iint_{\mathcal{C}} rot_z(\overrightarrow{F})\, dx\, dy$$

da cui, tenuto presente che

$$rot_z(\overrightarrow{F}) = \cos(x + y) + \sin(x + y)$$

si ha

$$\oint_{\partial\mathcal{C}_r} \overrightarrow{F} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds = \iint_{\mathcal{C}_r} [\cos(x + y) + \sin(x + y)]\; dx\, dy.$$

Per passare al limite dell'integrale doppio a secondo membro conviene utilizzare la seguente considerazione di carattere generale:

Se una funzione $f(x, y)$ è continua in un intorno dell'origine le sue medie sui dischi $\mathcal{C}_r$ verificano

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathcal{C}_r} f(x, y)\, dx\, dy \to f(0, 0) \quad \text{per } r \to \infty.$$

Infatti

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathcal{C}_r} f(x, y)\, dx\, dy = f(0, 0) + \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathcal{C}_r} [f(x, y) - f(0.0)]\, dx\, dy,$$

e il secondo membro tende a 0 per $r \to 0$: infatti, grazie alla continuità di $f(x, y)$ in $(0, 0)$, dato comunque $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|f(x, y) - f(0, 0| < \varepsilon \quad \text{per } x^2 + y^2 < \delta$$

e quindi

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathcal{C}_r} |f(x,y)-f(0.0)|\,dx\,dy < \varepsilon \quad \text{per } r<\delta.$$

Nel caso della funzione $f(x,y)=\cos(x+y)+\sin(x+y)$, che vale 1 in $(0,0)$, otteniamo dunque

$$\frac{1}{r^2}\oint_{\partial\mathcal{C}_r} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{\tau}\,ds = \frac{1}{r^2}\iint_{\mathcal{C}_r} rot_z(\overrightarrow{F})\,dx\,dy \to \pi \quad \text{per } r\to 0.$$

Esercizio 7 Assegnate due funzioni continue f e g, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} (f(x)+y)dx + (g(y)-3x)dy$$

essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 percorsa nel verso antiorario.

Risposta Il campo vettoriale

$$E_0 = \{f(x), g(y)\}$$

è conservativo: un suo potenziale è infatti $U(x,y)=F(x)+G(y)$ essendo F e G due primitive di f e g, certamente esistenti se f e g sono almeno continue.

Il campo

$$E_1 = \{y, -3x\}$$

non è conservativo: infatti $rot(E_1)=-4$ e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} \{(f(x)+y)dx + (g(y)-3x)dy\} = \int_{\mathcal{C}} \{f(x)dx + g(y)dy\} + \int_{\mathcal{C}} \{ydx - 3xdy\} =$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \{ydx - 3xdy\} = \iint_{\mathcal{C}} -4\,dx\,dy = -4\pi$$

Esercizio 8 Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy-5)\,dx + (x^2+3y^2)\,dy$$

essendo $\mathcal{C}$

- il segmento da $(-1,0)$ a $(1,0)$, oppure
- l'arco di parabola $y=x^2-1$ percorso da $(-1,0)$ a $(1,0)$.

Risposta

- sul segmento:

$$\int_{\mathcal{C}} \left\{(2xy-5)\,dx + (x^2+3y^2)\,dy\right\} = \int_{-1}^{1} -5\,dx = -10$$

- sull'arco di parabola: $x = t, y = t^2 - 1,\ t \in [-1, 1]$

$$\int_{\mathcal{C}} \left\{(2xy - 5)\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy\right\} = \int_{-1}^{1} \left[2t(t^2-1) - 5 + [t^2 + 3(t^2-1)^2]2t\right] dt = -10$$

L'uguaglianza dei due valori era del resto prevedibile dal momento che il campo $(2xy-5, x^2+3y^2)$ ha rotore nullo e, essendo definito in tutto il piano, è conservativo: pertanto il lavoro lungo una curva dipende solo dagli estremi, e il segmento e l'arco di parabola hanno gli stessi estremi.

Esercizio 9 Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} - 1, \cos y - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}\right)$$

lungo l'arco di parabola $y = x^2 - 4x + 3$ dal punto $(1, 0)$ al punto $(4, 3)$.

Risposta L'insieme di definizione E di $\overrightarrow{F}$ è il semipiano $x > y$, che è (ad esempio) stellato; $\overrightarrow{F}$ è irrotazionale, dunque conservativo, in E, e i suoi potenziali U si calcolano imponendo

$$U(x, y) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x-y}} - 1\right) dx = \sqrt{x-y} - x + g(y), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x-y} - x) + g'(y) = \cos y - \frac{1}{2\sqrt{x-y}}$$

da cui $g(y) = \sin y + C$: i potenziali di $\overrightarrow{F}$ sono le funzioni $\sqrt{x-y} - x + \sin y + C$, e quindi il lavoro è $-3 + \sin 3$. A questo stesso risultato si arriva naturalmente anche calcolando l'integrale curvilineo.

Esercizio 10 Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{v} = \left\{\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

calcolare il lavoro relativo

- alla circonferenza $\mathcal{G}$ di centro $(1, 3)$ e raggio $r = 1$,
- alla circonferenza $\mathcal{P}$ di centro $(1, 3)$ e raggio $r = 4$.
- alla curva $C : x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ t \in [0, k\pi],\ k > 0$.

Risposta Il campo $\overrightarrow{v}$ ha rotore nullo in $\mathbb{R} - \{(0, 0)\}$: quindi è conservativo in ogni aperto semplicemente connesso Ω.

- la circonferenza $\mathcal{G}$ di centro $(1, 3)$ e raggio $r = 1$ è contenuta nell'aperto $\Omega : y > 0$ semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{R} - \{(0, 0)\}$: quindi il lavoro di $\overrightarrow{v}$ lungo essa è nullo.
- la circonferenza $\mathcal{P}$ di centro $(1, 3)$ e raggio $r = 4$ include l'origine al suo interno, quindi non è contenuta in alcun aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R} - \{(0, 0)\}$.

  L'aperto $\Omega = \{$ disco aperto di centro $(1, 3)$ e raggio $4\} \setminus \{$ disco chiuso di centro l'origine e raggio 1 $\}$ è ammissibile per la formula di Gauss–Green, o Stokes; la sua frontiera $\partial\Omega$, con l'orientamento positivo richiesto, è costituita da $\mathcal{P}$ percorsa in senso antiorario insieme alla circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso orario (fare il disegno!); siccome $rot(\overrightarrow{v}) = 0$ si ottiene

$$0 = \iint_{\otimes r} rot_z(\overrightarrow{v})\, dx\, dy = \oint_{\partial\Omega} \left\{ \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right\}$$

$$= \oint_{\mathcal{P}} \left\{ \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right\} - \oint_{\mathcal{C}} \left\{ \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy \right\} = \int_{\mathcal{P}} \overrightarrow{v} \,.\, \tau ds - \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \,.\, \tau ds$$

e quindi, siccome

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v} \,.\, \tau ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)) d\vartheta = 2\pi$$

si ottiene

$$\int_{\mathcal{P}} \overrightarrow{v} \,.\, \tau ds = 2\pi.$$

- L'integrale sulla curva C assegnata si calcola direttamente

$$\int_{C} \overrightarrow{v} \,.\, \tau ds = \int_0^{k\pi} (\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)) d\vartheta = k\pi.$$

Esercizio 11 Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{w} = \left\{ \frac{-y}{r^n}, \frac{x}{r^n} \right\}$$

calcolare il lavoro

$$\int_C \overrightarrow{w} \,.\, \overrightarrow{\tau}\, ds$$

essendo C la circonferenza di centro l'origine e raggio $r > 0$.

Risposta Il calcolo diretto produce

$$\oint_C \overrightarrow{w} \,.\, \tau\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{r(\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta))}{r^n} r d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{r^{n-2}} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{2\pi}{r^{n-2}}$$

Esercizio 12 Calcolare il flusso del campo di forze

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (x^3 y, -x^2 y^2)$$

uscente dalla frontiera del dominio D intersezione del cerchio di centro $(0, -3)$ e raggio 1 col semipiano $y \geq -3$.

Risposta Si usa il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\nu}\, ds = \iint_D \mathrm{div} \overrightarrow{F}\, dxdy = \iint_D x^2 y\, dxdy.$$

Il calcolo dell'integrale doppio si fa passando alle coordinate polari: $x = \varrho\cos\vartheta, y = -3 + \varrho\sin\vartheta$ con $0 \le \varrho \le 1,\ \ 0 \le \vartheta \le \pi$:

$$I = \int_0^1 \varrho^3\,d\varrho \int_0^\pi \cos^2\vartheta(-3+\varrho\sin\vartheta)d\vartheta = -3\int_0^1 \varrho^3\,d\varrho\int_0^\pi \cos^2\vartheta\,d\vartheta + \int_0^1 \varrho^4\,d\varrho \int_0^\pi \cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$= -3\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{\vartheta}{2}+\frac{\sin 2\vartheta}{4}\right]_0^\pi - \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^\pi = -\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{15}.$$

Esercizio 13 Calcolare il flusso del campo $\overrightarrow{F} = (x^2, xy)$ uscente dal dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x - 3y \le 2,\, 0 \le x - y \le 1\}$.

Risposta Siccome il dominio è un parallelogramma, si può applicare il teorema (di Gauss-Green e quindi quello) della divergenza:

$$\text{flusso} = \int_{+\partial D} \overrightarrow{F}\cdot\nu\,ds = \iint_D \operatorname{div}\overrightarrow{F}\,dxdy = \iint_D 3x\,dxdy.$$

L'ultimo membro, col cambiamento affine di variabili

$$u = x-3y, \quad v = x - yt \Longleftrightarrow x = \frac{3v-u}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2},$$

con determinante jacobiano $\det[\partial(x,y)/\partial(u,v)] = 1/2$, diventa

$$\iint_{[1,2]\times[0,1]} 3\frac{3v-u}{2}\frac{1}{2}\,dudv = \frac{3}{4}\int_1^2 du\int_0^1 (3v-u)\,dv = \frac{3}{4}\int_1^2\left[3\frac{v^2}{2}-uv\right]_0^1 dv = \frac{3}{4}\left[\frac{3}{2}u-\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = 0.$$

Esercizio 14 Dato il dominio D di $\mathbb{R}^3$ costituito dai punti che si trovano nel quarto di spazio $y \ge 0,\, z \ge 0$ e tra le sfere di centro l'origine e raggio 1 e 2, calcolare

$$\iiint_D \frac{z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz.$$

Risposta In coordinate sferiche l'integrale diventa

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 \frac{\varrho\cos\varphi(\varrho^2\sin\varphi)}{\varrho^6}\varrho^2\sin^2\varphi\,d\varrho = \pi\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi\int_1^2\frac{d\varrho}{\varrho}\,d\varrho$$

$$= \pi\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2}[\log\varrho]_1^2 = \frac{\pi}{4}\log 2.$$

Esercizio 15 Dato il campo $F = (\frac{y}{1+xy} - y^2, \frac{x}{1+xy} - 2xy)$, calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = t^2,\ \ y(t) = t, \quad t \in [1,2],$$

percorsa nel verso delle t crescenti.

Risposta Nell'aperto stellato $x > 0, y > -1/x$ dove giace la curva il campo è conservativo, con potenziali $\log(1+xy) - xy^2 + C$, per cui il lavoro richiesto è

$$[\log(1+xy) - xy^2]_{(1,1)}^{(4,2)} = \log\frac{9}{2} - 15.$$

Naturalmente a questo risultato si arriva anche calcolando l'integrale curvilineo

$$\int_1^2 \left[\left(\frac{t}{1+t^3} - t^2\right)2t + \left(\frac{t^2}{1+t^3} - 2t^3\right)\right] = [\log(1+t^3) - t^4]_1^2.$$

Esercizio 16 Sia E il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$E := \left\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \text{tali che} \quad x^2+y^2 \le 1\,, \quad -\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\ \right\}.$$

Calcolare il volume di E.

Soluzione: In coordinate cilindriche sul dominio

$$E := \{r \le 1, -r \le z \le \sqrt{1-r^2}\}$$

si ottiene

$$2\pi \int_0^1 r\; dr \int_{-r}^{\sqrt{1-r^2}} dz = 2\pi \int_0^1 r(\sqrt{1-r^2} + r)\, dr = \frac{2\pi}{3} + \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{4\pi}{3}.$$

A questo risultato si arriva anche con considerazioni geometriche: E è un cilindro E_1 di raggio 1 privato in basso di un cono E_2 e sormontato da mezza sfera E_3 di raggio 1, i cui i rispettivi volumi sono dati da
$\text{Vol}(E_1) = \pi$, $\text{Vol}(E_2) = \pi/3$, $\text{Vol}(E_3) = 2\pi/3$.
Ne segue che $\text{Vol}(E) = \text{Vol}(E_1) - \text{Vol}(E_2) + \text{Vol}(E_3) = 4\pi/3$.

Esercizio 17 Dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left(\frac{3x^2}{4+x^3+y^2}, \frac{2y}{4+x^3+y^2}\right)$$

calcolarne il lavoro sull' arco di curva

$$\begin{cases} x = t^2+1 \\ y = 3t^3+2 \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$.

Soluzione: $\overrightarrow{F}$ è ben definito per $x \neq -\sqrt[3]{4+y^2}$, quindi in tutto il semipiano $x \geq 0$ e in particolare lungo l'arco di curva in considerazione. $\overrightarrow{F}$ è inoltre conservativo con potenziale

$$V(x,y) := \ln(4+x^3+y^2)$$

da cui segue che il lavoro è $L = V(2,5) - V(1,2) = \ln(37) - \ln(9)$.

Esercizio 18 Calcolare il lavoro compiuto dal campo

$$(-yx^{-2}e^{-(y/x)}, x^{-1}e^{-(y/x)})$$

lungo la curva sostenuta dalla semicirconferenza

$$S : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1,\ y \geq x$$

ed orientata in senso antiorario.

Risposta In ciascuno dei due semipiani $x > 0$ (dove si trova S) e $x < 0$ (aperti stellati!) il campo è conservativo perché irrotazionale, ed un suo potenziale è la funzione $f(x,y) = -e^{-(y/x)}$. Gli estremi di S sono le intersezioni della circonferenza con la retta $y = x$, per cui il lavoro richiesto è nullo.