ANALISI VETTORIALE — ESERCIZI SULLE SUPERFICI

Esercizio 1 Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in E, \;\; z = 2 + x^2 + y^2\}$$

dove

$$E = \{(x, y) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Esercizio 2 Indicata con S la superficie ottenuta per rotazione intorno all'asse z del grafico della funzione

$$x = 1 - \sqrt{1 - z^2}, \;\; z \in [-1, 1],$$

- determinare una rappresentazione parametrica di S,
- calcolare l'area di S,
- calcolare l'integrale superficiale

$$\iint_S z \, d\sigma.$$

Esercizio 3 Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x = u\cos(v), \; y = u\sin(v), \; z = u^2, \quad u \in [1, 2], \; v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Esercizio 4 Siano

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \\ g(x, y) = 10 - (3x^2 + 2xy + 5y^2) \end{cases}$$

e sia

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1, \; f(x, y) \le z \le g(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

detto $\overrightarrow{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ il versore normale esterno a $\partial\Omega$, calcolare i tre integrali superficiali

$$\iint_{\partial\Omega} z\, \nu_3 \, d\sigma, \quad \iint_{\partial\Omega} x\, \nu_1 \, d\sigma, \quad \iint_{\partial\Omega} x\, \nu_2 \, d\sigma.$$

Esercizio 5 Sia

$$\overrightarrow{F} = \frac{k}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \{x, \, y, \, z\}$$

il campo elettrico generato da una carica posta nell'origine: calcolare il flusso uscente di $\overrightarrow{F}$ attraverso

- la superficie sferica

$$\mathbb{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- l'ellissoide

$$\mathbb{E}: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

- il parallelepipedo

$$\mathbb{P}: 1 \leq x \leq 5,\ 1 \leq y \leq 6,\ 1 \leq z \leq 7$$

Esercizio 6 Assegnata la curva

$$\mathbb{C}: \begin{cases} x=\cos(t), \\ y=2\sin(t), \quad t\in[0,2\pi] \\ z=3\cos(t), \end{cases}$$

- determinare il lavoro del campo $\overrightarrow{F}=\{x+y,\, 2x+z,\, z+y\}$ lungo $\mathbb{C}$ nel verso quello offerto dalla rappresentazione parametrica al crescere di $t\in[0,2\pi]$,
- riconoscere che $\mathbb{C}$ è bordo della superficie cartesiana

$$\mathbb{S}: z=3\,x, \qquad x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1,$$

- calcolare tale lavoro avvalendosi della Formula di Stokes,
- riconoscere il legame tra il lavoro ottenuto e l'area di $\mathbb{S}$

Esercizio 7 Assegnata la superficie cartesiana

$$z=1+3x+2y, 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$$

- calcolare i suoi termini L^2, M^2, N^2,
- calcolare l'area e confrontarla con quella del quadrato $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$ su cui la superficie è assegnata.

Esercizio 8 Assegnata la superficie

$$\mathbb{S}:\ x=u^2+v^2,\, y=u^2-v^2,\, z=2uv,\ u^2+v^2\leq 1$$

- calcolare la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

- calcolare i tre valori L^2, M^2, N^2
- esprimere l'elemento d'area $d\,\sigma$
- calcolare l'area di $\mathbb{S}$.

Esercizio 9 Assegnato nel piano $x\,z$ il grafico

$$x=1+z^2,\ -1\leq z\leq 1$$

consideriamo la superficie $\mathbb{S}$ ottenuta facendo ruotare tale grafico intorno all'asse z

- determinare le equazioni parametriche di $\mathbb{S}$,
- determinare l'area di $\mathbb{S}$.

Esercizio 10 Calcolare la quota del baricentro

$$z_G = \frac{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} z \, d\sigma}{\iint_{\mathbb{S}_{RH}} d\sigma}$$

della calotta sferica

$$\mathbb{S}_{RH} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad H \leq z \leq R$$